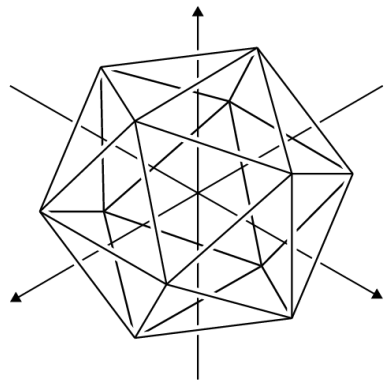


Matematyczny Armagedon, czyli jak modelowanie może świat uratować

Wykład: dr inż. Łukasz Błaszczuk, Kamil Wołos

Kim jesteśmy?



KOŁO
NAUKOWE
MODELOWANIA
MATEMATYCZNEGO

Czym jest
modelowanie?

Modelowanie...

Modelowanie – doświadczalna lub matematyczna metoda badania złożonych układów, zjawisk i procesów (technicznych, fizycznych, chemicznych, ekonomicznych itp.) na podstawie tworzenia ich modeli.

Encyklopedia PWN

... i model

Model – uproszczony obraz badanego fragmentu rzeczywistości, w którym eliminuje się elementy nieistotne dla danego celu; przedmiot dostatecznie podobny do badanego, ale prostszy i bardziej dostępny badaniom.

Encyklopedia PWN

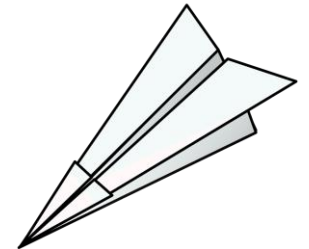
Modelowanie doświadczalne

Modelowanie doświadczalne –

bada się układy podobne, ale w (najczęściej) mniejszej skali, lub inne, ale rządzone przez podobne prawa.



zmniejszenie skali



Przykład



Tunel aerodynamiczny (naddźwiękowy) w Lewis Flight Propulsion Laboratory (rok 1957).

Modelowanie matematyczne

Modelowanie matematyczne –
próba opisania rzeczywistości za pomocą
języka matematyki.



Język matematyki



Przykład modelu – wahadło matematyczne

Eksperyment – chcemy zbadać zależność okresu wahadła od jego długości.

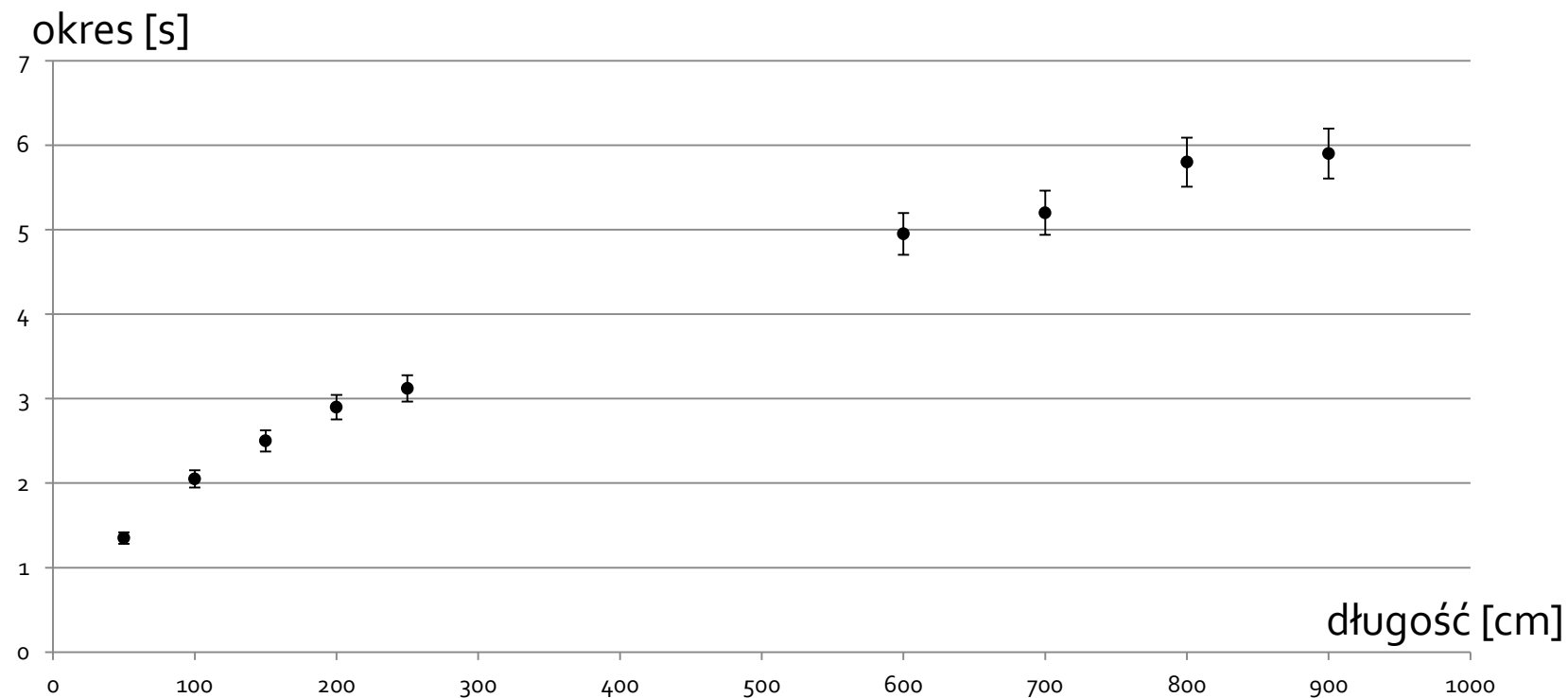
Dane – pomiary z eksperymentu.

Długość [cm]	50	100	150	200	250	600	700	800	900
Okres [s]	1,35	2,05	2,50	2,90	3,12	4,95	5,20	5,80	5,90

Pytanie – jaka funkcja (model matematyczny) dobrze przybliży te dane?

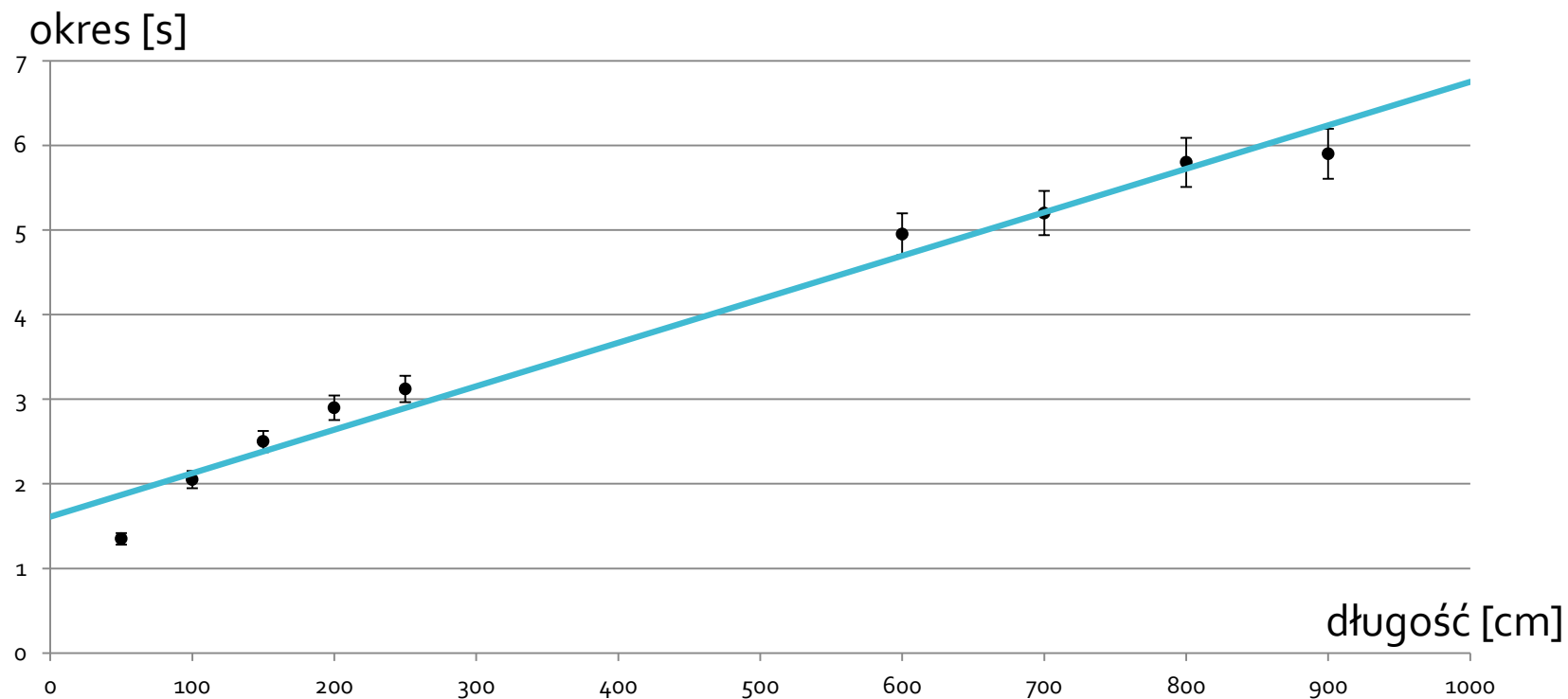
Przykład
modelu –
wahadło
matematyczne,
c.d.

Długość [cm]	50	100	150	200	250	600	700	800	900
Okres [s]	1,35	2,05	2,50	2,90	3,12	4,95	5,20	5,80	5,90



Przykład
modelu –
wahadło
matematyczne,
c.d.

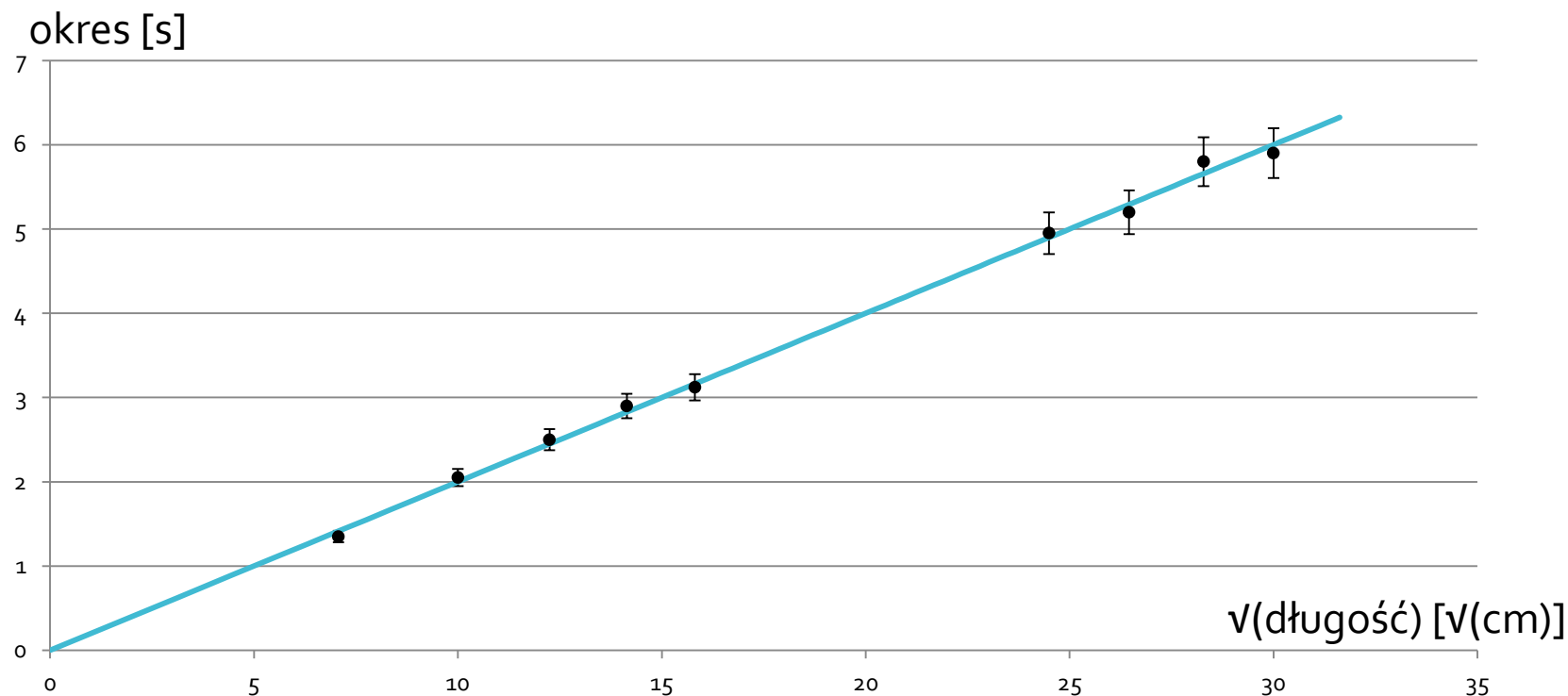
Długość [cm]	50	100	150	200	250	600	700	800	900
Okres [s]	1,35	2,05	2,50	2,90	3,12	4,95	5,20	5,80	5,90



Funkcja liniowa (**afiniczna**)? Może inna będzie lepsza?

Przykład modelu – wahadło matematyczne, c.d.

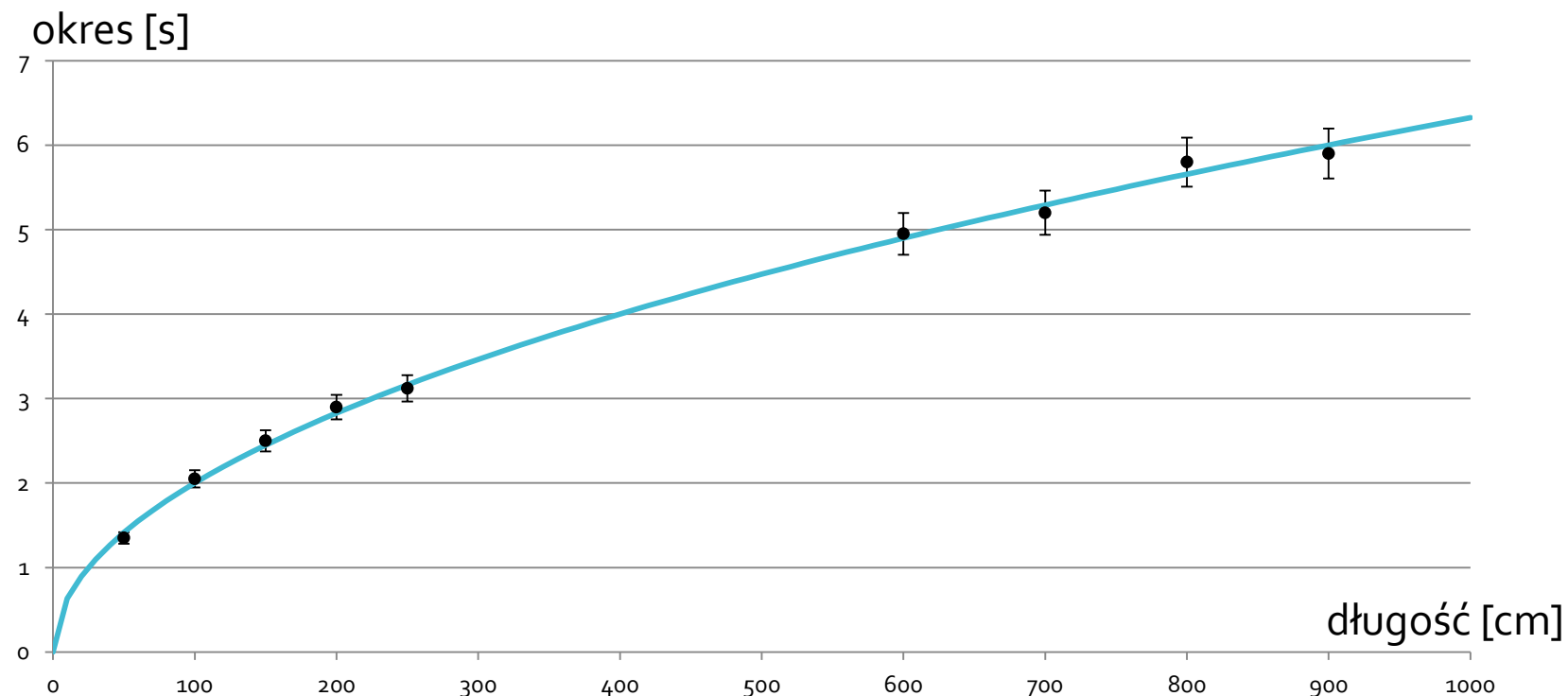
Długość [cm]	50	100	150	200	250	600	700	800	900
Okres [s]	1,35	2,05	2,50	2,90	3,12	4,95	5,20	5,80	5,90



Szukając zależności od **pierwiastka** długości wahadła widzimy, że pojawia się funkcja liniowa: $T \sim \sqrt{\ell}$.

Przykład modelu – wahadło matematyczne, c.d.

Długość [cm]	50	100	150	200	250	600	700	800	900
Okres [s]	1,35	2,05	2,50	2,90	3,12	4,95	5,20	5,80	5,90



Szukając zależności od **pierwiastka** długości wahadła widzimy, że pojawia się funkcja liniowa: $T \sim \sqrt{\ell}$.

UKŁAD SI

- Modeluje wyidealizowane wielkości jednostek.
- Jest jedynie „umową” co do miar, na której wszyscy się opierają.
- Nie przedstawia dokładnego stanu (ze względu np. na niedokładności pomiarowe).

Proste przykłady



Wzorzec kilograma przechowywany w Międzynarodowym Biurze
Miar i Wag w Sevres koło Paryża

Proste przykłady



Wzorzec metra z lat 1889 -1960

Dlaczego
używamy
modelowania?
– przykład

Założmy, że jesteśmy
właścicielami koncernu
samochodowego ...



Chcemy ograniczyć
koszty materiałów
i spalanie auta...

Co zrobiłby
niemądry
właściciel?

seria pojazdów z różnymi parametrami części
i różną aerodynamiką

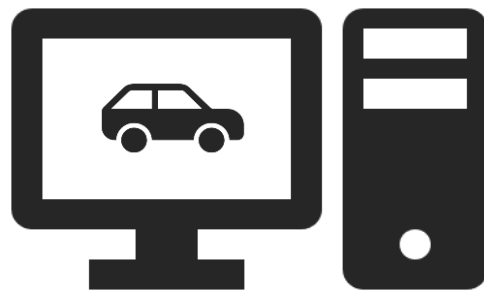


TESTY



Co umożliwia modelowanie?

1. Zaprojektowanie i stworzenie modelu.
2. Wykonanie testów.
3. Produkcja auta.



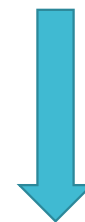
Zalety modelowania matematycznego



Może znacznie obniżyć koszty – nie trzeba budować kosztownych układów

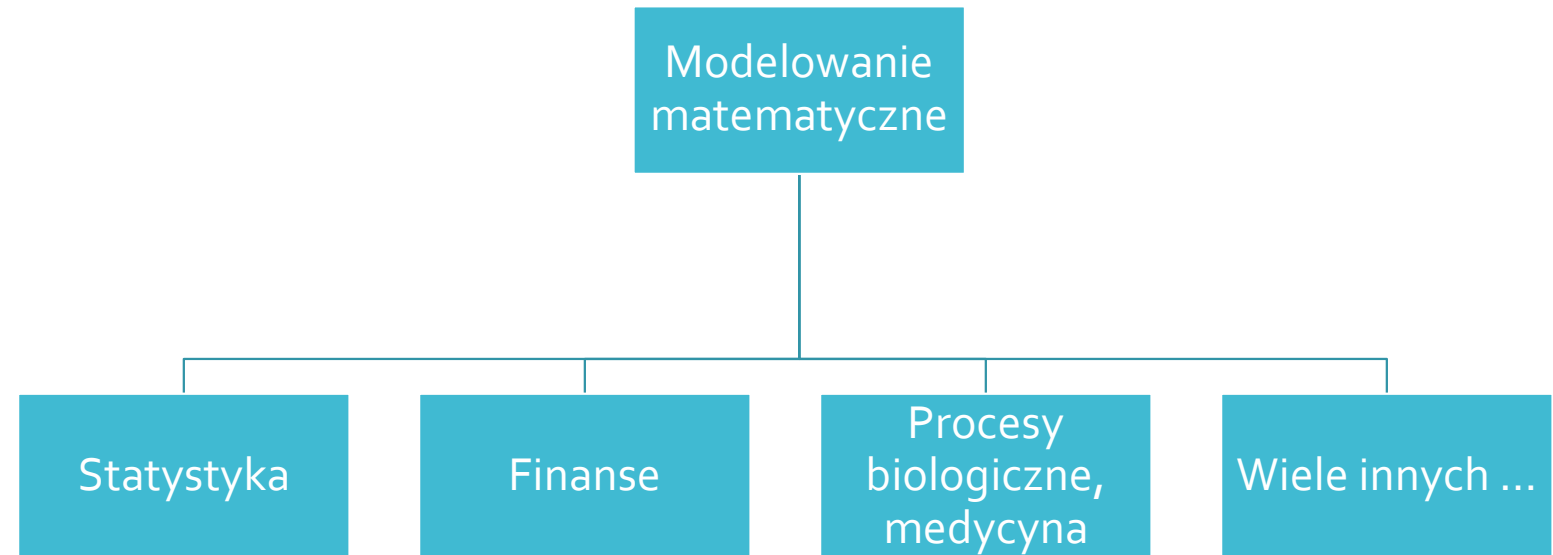


Umożliwia przyspieszenie produkcji



Pozwala szybko sprawdzić różne warianty

Nie tylko
technika ...



Statystyka

Problem klasyfikacji



Klasa



Oceny z pierwszego półrocza



Kto zda do
następnej klasy?



Regresja liniowa

Czynniki wpływające na wagę



wzrost



aktywność ruchowa



Ilość wizyt w miesiącu
u babci

$$X = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – jak bardzo zmienne są istotne w modelu?

Procesy biologiczne i medycyna

Symulacja przepływu krwi ludzkiej (mechanika płynów)



Modele dynamiki rozwoju populacji

Modele odpowiedzi odpornościowej na infekcję



Modelowanie rozrostu roślin

WAŻNE!

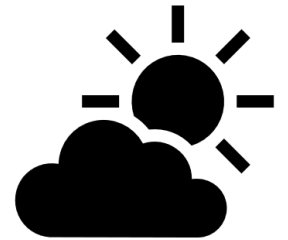
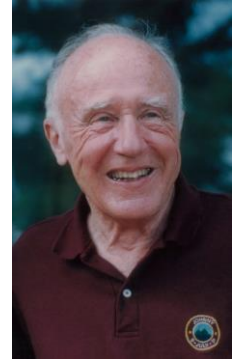
**BARDZO TRUDNO JEST
STWORZYĆ DOKŁADNY
I UNIWERSALNY MODEL
OPISUJĄCY DANE ZJAWISKO**

Przykład – prognoza pogody

Rok 1960 – Edward Lorenz pracuje nad modelem prognozy pogody

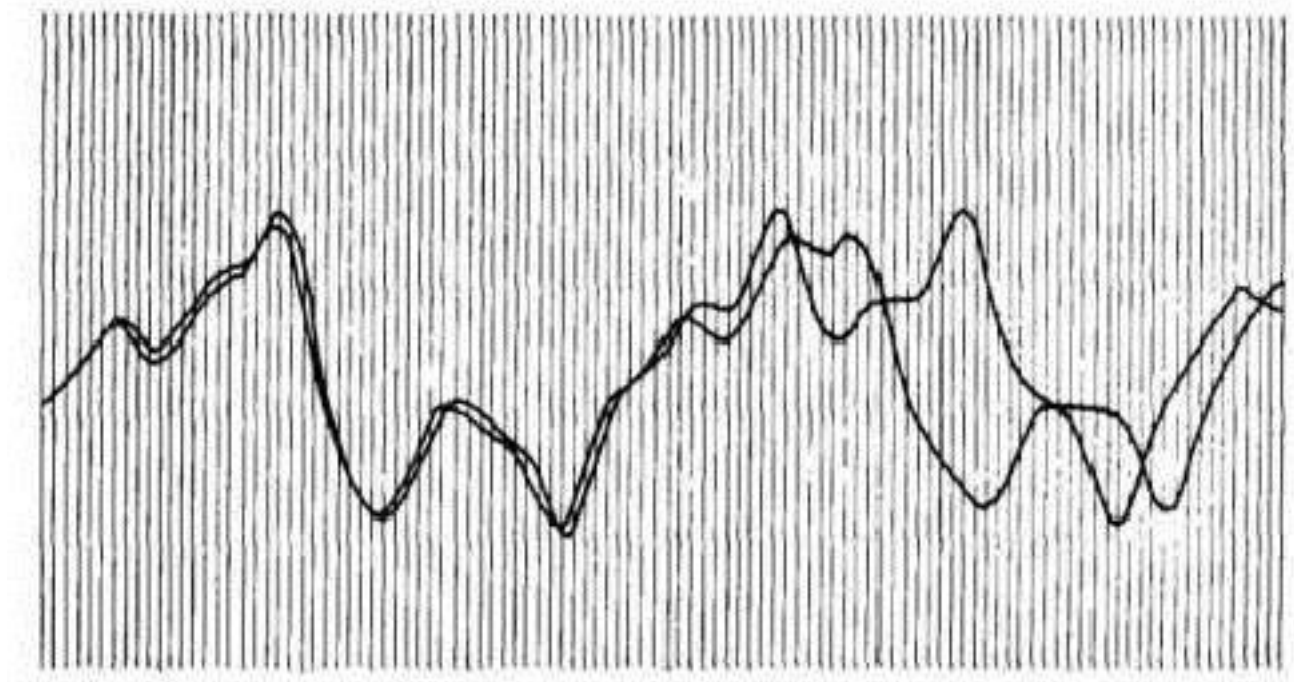
Tworzy 12 równań opisujących zależność między ciśnieniem, temperaturą (dla dobra słuchaczy, nie podamy tych równań)

Sądzi, że prawie dokładne dane wstawione do układu dają prawie dokładne wyniki. Wprowadza więc do układu dwie liczby wejściowe: 0.506127 a potem 0.506



Przykład – prognoza pogody c.d.

Wystarczyło, by zmiana danych wejściowych różniła się o 0.025%, żeby różnica na wyjściu była już znacząca:



0.506127 → 0.506

Wniosek

Nie jest możliwe prognozowanie pogody na więcej niż **3-4 dni do przodu**, gdyż nie znamy danych wejściowych na tyle dokładnie, by później błąd nie miał znaczenia!

Prognoza pogody dla Warszawa, Pogoda na 16 dni - Twoja Pogoda

[www.pogoda.mazda.pl](https://pogoda.mazda.pl) > Polska > mazowieckie > Warszawa ▼

Prognoza pogody dla Warszawa na najbliższe dni. Sprawdź jaka pogoda będzie w Warszawa.

Aktualne informacje meteorologiczne dla Warszawa.

Pogoda długoterminowa Warszawa na 25 dni – Długoterminowa ...

<https://pogoda.mazda.pl> > Pogoda > Polska > Mazowieckie ▼

Warszawa - długoterminowa pogoda na 25 dni. Aktualizowana co 60 min – prognoza pogody

Warszawa . Najlepsza sprawdzalność. ... Niedziela 04.03. 0°C -6°C. Przeważnie słonecznie. N 12 km/h

Max 16 km/h. Zachm. 6%; Deszcz: 0mm. 1003,1 hPa. 6:16; 17:21; Uv 2/10. Poniedziałek 05.03. 3°C

-5°C. Słonecznie.

Ta strona była przez Ciebie odwiedzana 2 razy. Ostatnia wizyta: 26.02.18



Efekt motyla

Formalna definicja:

Wrażliwa zależność danego układu od warunków początkowych, gdzie ich mała zmiana może prowadzić do bardzo dużych różnic w późniejszym czasie.

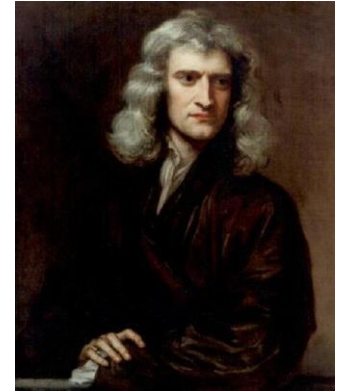
Trzepot skrzydeł motyla w Ohio może spowodować po trzech dniach burzę piaskową w Teksasie



To zdjęcie, autor: Nieznany autor,
licencja: [CC BY-SA](#)

Inny przykład – prawa dynamiki Newtona

Sformułowane przez Isaaca
Newtona w XVII w.



Nie mają zastosowania w mechanice
kwantowej



W mechanice relatywistycznej obowiązują
w ograniczonym zakresie

O czym musimy pamiętać?



Model matematyczny będzie spełniał nasze założenia w konkretnym przypadku. Modeli uniwersalnych (jeszcze) nikt nie wymyślił.



Doskonałość matematyki kłóci się poniekąd z rzeczywistością, w której panuje chaos i nieporządek.

Jak matematyk
z inżynierem...



Dwa światy (uzupełniające się)



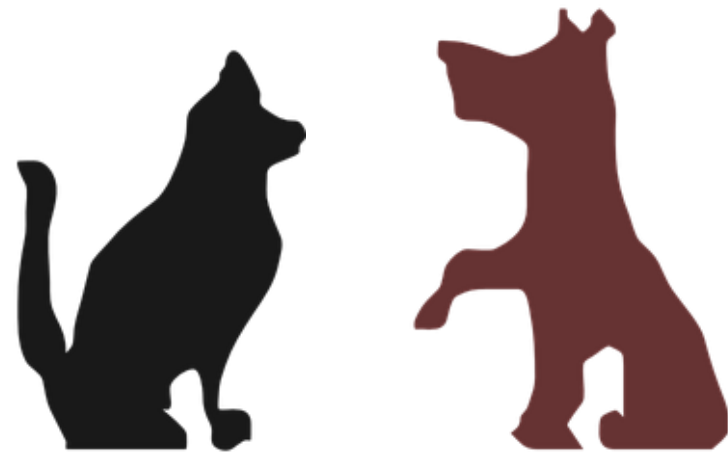
Inżynier na podstawie obserwacji formułuje hipotezę dotyczącą modelu, ale często nie wie czy tak stworzony opis jest *dobrze postawiony*.



Matematyk sprawdza czy (i kiedy) postawiony problem ma rozwiązanie i czy w pełni odzwierciedla opisywane zagadnienie.

Dwa światy (uzupełniające się)

Modelowanie łączy w sobie te dwa dość różne
(choć uzupełniające się) światy.



Jakich programów
używamy do
modelowania?

Programy do modelowania matematycznego możemy
podzielić na dwa typy



Programy do obliczeń numerycznych



Programy do obliczeń symbolicznych

Obliczenia symboliczne a numeryczne

Obliczenia symboliczne

- Są wykonywane na wyrażeniach matematycznych
- Obliczenia wykonywane są na liczbach i symbolach

Przykład:

$> 2x + 3x$

$: 5x$

Obliczenia symboliczne a numeryczne

Obliczenia numeryczne:

- Są to obliczenia wykonywane na liczbach
- Otrzymywane wyniki są na ogół przybliżone z określoną dokładnością
- Wykorzystywane szczególnie, gdy problem nie ma rozwiązania w postaci analitycznej (danego jawnym wzorem) lub uzyskanie takiego jest bardzo złożone obliczeniowo

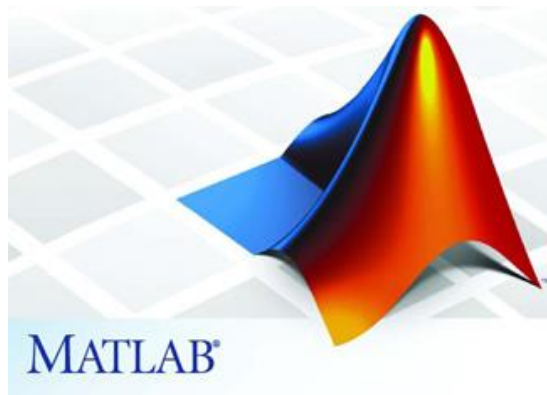
Przykład:

> x = 1

> 2x + 3x

: 5.0

Pakiety



Dlaczego modelowanie może świat uratować

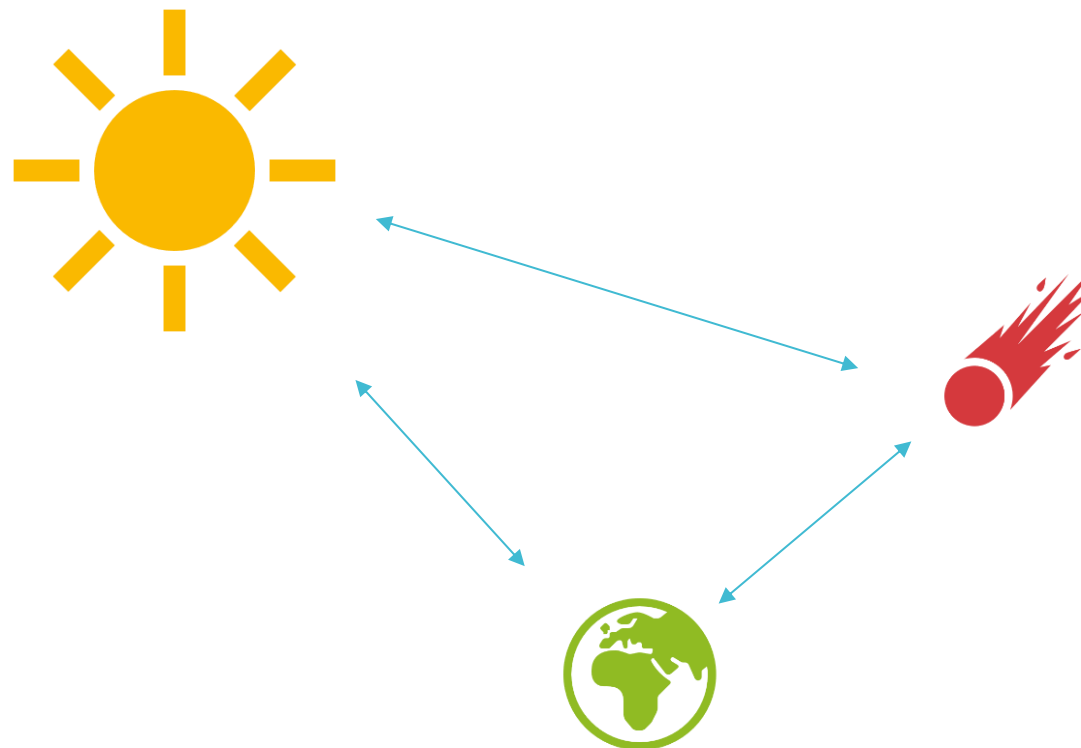
czyli tematyka warsztatów

Zadanie z warsztatów

Rozważamy tzw. problem trzech ciał

Problem polega na zbadaniu zależności pomiędzy trzema ciałami mając do dyspozycji dane dotyczące położenia, masy i prędkości obiektów w jakimś punkcie w czasie. Na podstawie tych wielkości określamy ich ruch.

Zadanie z warsztatów



Zadanie z warsztatów

Układ równań opisujący zależność

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -Gm_2 \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^3} - Gm_3 \frac{x_1 - x_3}{|x_1 - x_3|^3} \\ \ddot{x}_2 &= -Gm_3 \frac{x_2 - x_3}{|x_2 - x_3|^3} - Gm_1 \frac{x_2 - x_1}{|x_2 - x_1|^3} \\ \ddot{x}_3 &= -Gm_1 \frac{x_3 - x_1}{|x_3 - x_1|^3} - Gm_2 \frac{x_3 - x_2}{|x_3 - x_2|^3}\end{aligned}$$

Zadanie z warsztatów

Jak ratowaliśmy/ będziemy ratować świat za pomocą modelowania?



Zakładamy, że w kierunku Ziemi pędzi niebezpieczna asteroida!



Na zajęciach laboratoryjnych zastanowimy(liśmy) się jak uniknąć zagłady



Razem zamodelujemy(liśmy) układ i przemyślimy scenariusze ratowania Ziemi

Dziękujemy za uwagę! 😊