Matematyczne nierówności. Mini Akademia Matematyki. 06.06.2020 r., Warszawa,
zwierz@mini.pw.edu.pl

Zadanko 1. *W wierzchołkach A, B, C trójkąta równobocznego mieszkają zwierzaki. W wierzchołku A - trzech, w B - czterech, w C - siedmiu. Gdzie w trójkącie powinni ustalić spotkanie, by przebyta przez nich wszystkich droga była jak najmniejsza?*

Podpowiedź: *Skorzystaj z nierówności trójkąta.*

Zadanko 2. *W wierzchołkach A, B, C, D kwadratu mieszkają zwierzaki. W wierzchołku A - trzech, w B - czterech, w C - siedmiu, w D - piętnastu. Gdzie w kwadracie powinni ustalić spotkanie, by przebyta przez nich wszystkich droga była jak najmniejsza?*

Podpowiedź: *Skorzystaj z nierówności trójkąta.*

Twierdzenie 1. *Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami oraz niech $K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$, $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot_n}$, $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$. Zachodzi wtedy tzw. nierówność między średnimi:*

$$K_n \geqslant A_n \geqslant G_n \geqslant H_n$$

oraz równości w powyższych nierównościach zachodzą wtedy i tylko wtedy kiedy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Zadanko 3. *Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$.*

Zadanko 4. *Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.*

Zadanko 5. *Udowodnij, że dla dodatniej liczby rzeczywistej t zachodzi $t + \frac{1}{t} \geqslant 2$.*

Zadanko 6. *Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b zachodzi $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant 8$.*

Zadanie z kursu maturalnego prowadzonego przez Koło Naukowe Matematyków z Wydziału MiNI PW.

Zadanko 7. *Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+$.*

Zadanko 8. *Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+$.*

Zadanko 9. *Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x + x^3 + \frac{2}{x^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+$.*

Zadanko 10. *Liczbę 10 rozłóż na sumę dwóch dodatnich składników, dla których suma ich kwadratów jest najmniejsza.*

Zadanko 11. *Liczbę 2020 rozłóż na sumę czterech dodatnich składników, dla których suma ich kwadratów jest najmniejsza.*

Zadanko 12. *Rozwiąż problem izoperymetryczny wśród prostokątów. Mianowicie, uzasadnij, że wśród wszystkich prostokątów o ustalonym obwodzie p największe pole na kwadrat.*

Zadanko 13. *Rozwiąż problem izoperymetryczny wśród trójkątów. Mianowicie, uzasadnij, że wśród wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie p największe pole na trójkąt równoboczny.*

Wskazówka: *Skorzystaj ze wzoru Herona oraz z nierówności między średnimi.*

Zadanko 14. *Producent wytwarza aluminiowe kubki w kształcie walca o objętości 8 cali sześciennych. Znajdź wymiary kubka, do którego produkcji potrzeba najmniejszej możliwej ilości materiału.*

Zadanko 15. *Udowodnij, że jeżeli dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniają*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant 1, \quad \text{to} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant n^2.$$

Twierdzenie 2 (Nierówność Cauchy'ego Schwarza). *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność:*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geqslant \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2.$$

Ponadto, równość w powyższej nierówności zachodzi jeżeli ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ są proporcjonalne.

Zadanko 16. *Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2$.*

Zadanko 17 (Nierówność Nesbitta). *Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Wskazówka: *Dodaj stronami 3 i lewą stronę nierówności zapisz w postaci $(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)$. Następnie podstaw $x = \sqrt{b+c}$, $y = \sqrt{c+a}$, $z = \sqrt{a+b}$.*

Zadanko 18. *Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi*

$$\left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geqslant 9a^2 b^2 c^2.$$

Zadanko 19. *Niech W będzie wielomianem o dodatnich współczynnikach. Udowodnij, ze jeżeli nierówność*

$$W\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant \frac{1}{W(x)}$$

jest spełniona dla $x = 1$, to jest spełniona dla dowolnej liczby $x > 0$.

Zadanko 20. *Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że zbiorem wartości funkcji*

$$f(x) = a \cos x + b \sin x$$

jest przedział $\left[-\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + b^2}\right]$.

Twierdzenie 3 (Nierówność Jensena). *Niech funkcja f będzie wypukła na przedziale $[a, b]$. Wtedy dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [a, b]$ zachodzi nierówność:*

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)}{n}.$$

Zadanko 21. *Niech α, β, γ będą kątami wewnętrznymi w trójkącie. Udowodnij, że*

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Zadanko 22. *Zapisz jaka nierówność wynika z zastosowania nierówności Jensena dla funkcji wypukłej $f(x) = x^n$ dla $x > 0$.*

Zadanko 23. *Narysuj wykres funkcji $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Udowodnij, że jeżeli nieujemne liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunek $x + y + z = 1$, to zachodzi*

$$\frac{2x+1}{x+1} + \frac{2y+1}{y+1} + \frac{2z+1}{z+1} \leqslant \frac{15}{4}.$$