

# W KRAINIE ŚREDNICH

MiNI Akademia Matematyki

06.10.2018

1. W jaki sposób, mając do dyspozycji 100 metrów bieżących ogrodzenia, ogrodzić prostokątną działkę o największym możliwym polu, przylegającą jednym bokiem do już istniejącego płotu?
2. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia  $\frac{x}{y} + \frac{3y}{z} + \frac{9z}{x}$  dla  $x, y, z > 0$ .
3. Dla dowolnej dodatniej stałej  $c$  znajdź największą wartość wyrażenia  $xy(c - x - y)$  dla  $x, y > 0$ .
4. Niech  $a > 0$ . Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia  $x^2 + \frac{a}{x}$  dla  $x > 0$ .
5. Znajdź największą wartość iloczynu  $xy(72 - 3x - 4y)$  dla  $x, y > 0$ .
6. Znajdź wymiary prostopadłościennego pudełka o największej objętości, wiedząc, że leży on w pierwszym oktancie, jeden jego wierzchołek leży w początku układu współrzędnych, trzy ściany go zawierające leżą w płaszczyznach układu współrzędnych, a przeciwległy wierzchołek leży na płaszczyźnie o równaniu  $2x + 3y + 4z = 12$ .
7. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia  $5x + \frac{16}{x} + 21$  dla  $x > 0$ .
8. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia  $x^2 + 4x + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$  dla  $x > 0$ .
9. Znajdź najmniejszą wartość funkcji  $f(x) = \frac{(x + 10)(x + 2)}{x + 1}$  dla  $x > -1$ .
10. Znajdź największą wartość iloczynu  $x^2y$  wiedząc, że  $x$  i  $y$  są dodatnie i spełniają równanie  $6x + 5y = 45$ .
11. Dla dowolnej stałej dodatniej  $a$ , wyznacz dla  $x > 0$  maksymalne wartości ilorazów
  - (a)  $\frac{x}{x^2 + a}$ ,
  - (b)  $\frac{x^2}{x^3 + a}$ .
12. Producent wytwarza aluminiowe kubki w kształcie walca o objętości 8 cali sześciennych. Znajdź wymiary kubka, do którego produkcji potrzeba najmniejszej możliwej ilości materiału.
13. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia  $6x + \frac{24}{x^2}$  dla  $x > 0$ .

14. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia  $x^6 + \frac{1}{x^4}$  dla  $x > 0$ .
15. Wyznacz największą wartość wyrażenia  $\frac{xy - 4x - 3y}{x^2y^3}$  dla  $x > 0$  i  $y > 0$ .
16. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia  $xy + 2xz + 3yz$  dla  $x, y, z > 0$  wiedząc, że  $xyz = 48$ .
17. Wykonaj mnożenie  $(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$  i wyznacz najmniejszą wartość tego iloczynu.  
Wyciągnij wniosek, jaka będzie najmniejsza wartość  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  dla dodatnich liczb  $x, y, z$  o ustalonej sumie.
18. Wyznacz długość najdłuższej drabiny, którą można przenieść poprzez prostokątny zakręt z korytarza o szerokości  $a$  do korytarza o szerokości  $b$ .
19. Rozważmy ciąg  $a_n = \sqrt[n]{n}$ . Jaka jest jego granica przy  $n \rightarrow \infty$ ?