



CZY KALAFIOR MOŻE SIĘ PRZYDAĆ W ELEKTRONICE?

ŁAGODNE ODERWANIE SIĘ OD CODZIENNOŚCI MATEMATYKI

dr inż. Michał Zwierzyński



PROJEKT MATHFIGS





MATHFIGS

- Popularyzacja matematyki oraz innych nauk ścisłych przy pomocy poklatkowej animacji klocków LEGO.
- Youtube/Facebook: MATHFIGS





Powszechny Internetowy Konkurs dla Uczniów Szkół Średnich - Matematyka

zorganizowany przez wydział Matematyki i Nauk Informatycznych PW

www.konkurs.mini.pw.edu.pl

- Konkurs zaczyna się w grudniu 2024
- Multikonta (nauka przez praktykę), feedback
- Etapy internetowe, zadania zamknięte i otwarte
- Półfinały w wielu miejscach w Polsce / online
- Finał na Politechnice





Powszechny Internetowy Konkurs dla Uczniów Szkół Średnich - Matematyka

zorganizowany przez wydział Matematyki i Nauk Informatycznych PW

www.konkurs.mini.pw.edu.pl

○ Nagrody:

- Indeksy na wydział MiNI PW, inne wydziały PW oraz PG dla laureatów
- Maksymalna liczba punktów z matematyki w postępowaniu rekrutacyjnym dla laureatów i wyróżnionych
- Stypendium Fundacji Rodziny Maciejko
- Sprzęt komputerowy ufundowany przez Rektora PW dla zwycięzcy i nauczyciela zwycięzcy
- Kalkulatory, książki, planszówki, ...





MIASTA SZKÓŁ UCZESTNIKÓW XXII EDYCJI





MIASTA SZKÓŁ FINALISTÓW XXII EDYCJI



MiNI AKADEMIA MATEMATYKI



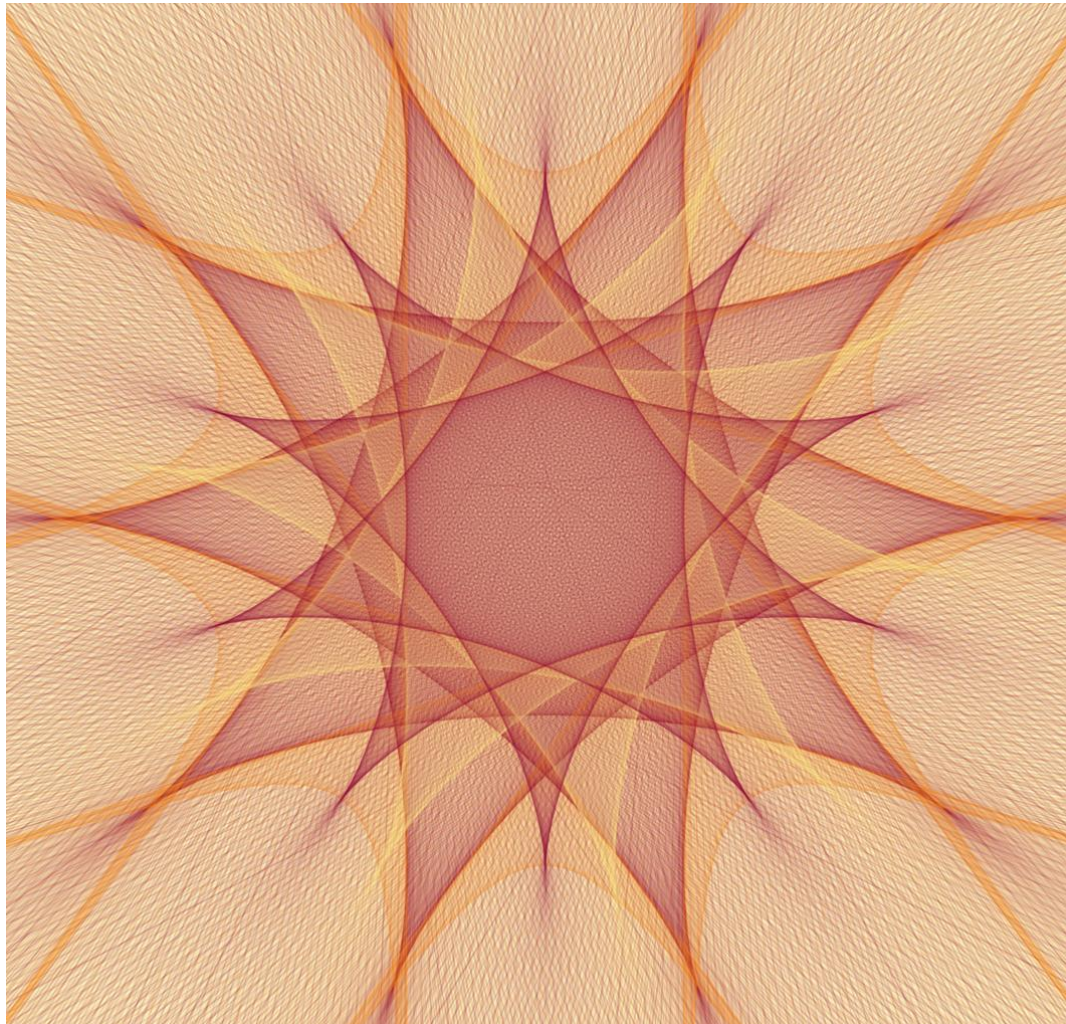
MiNI Akademia Matematyki

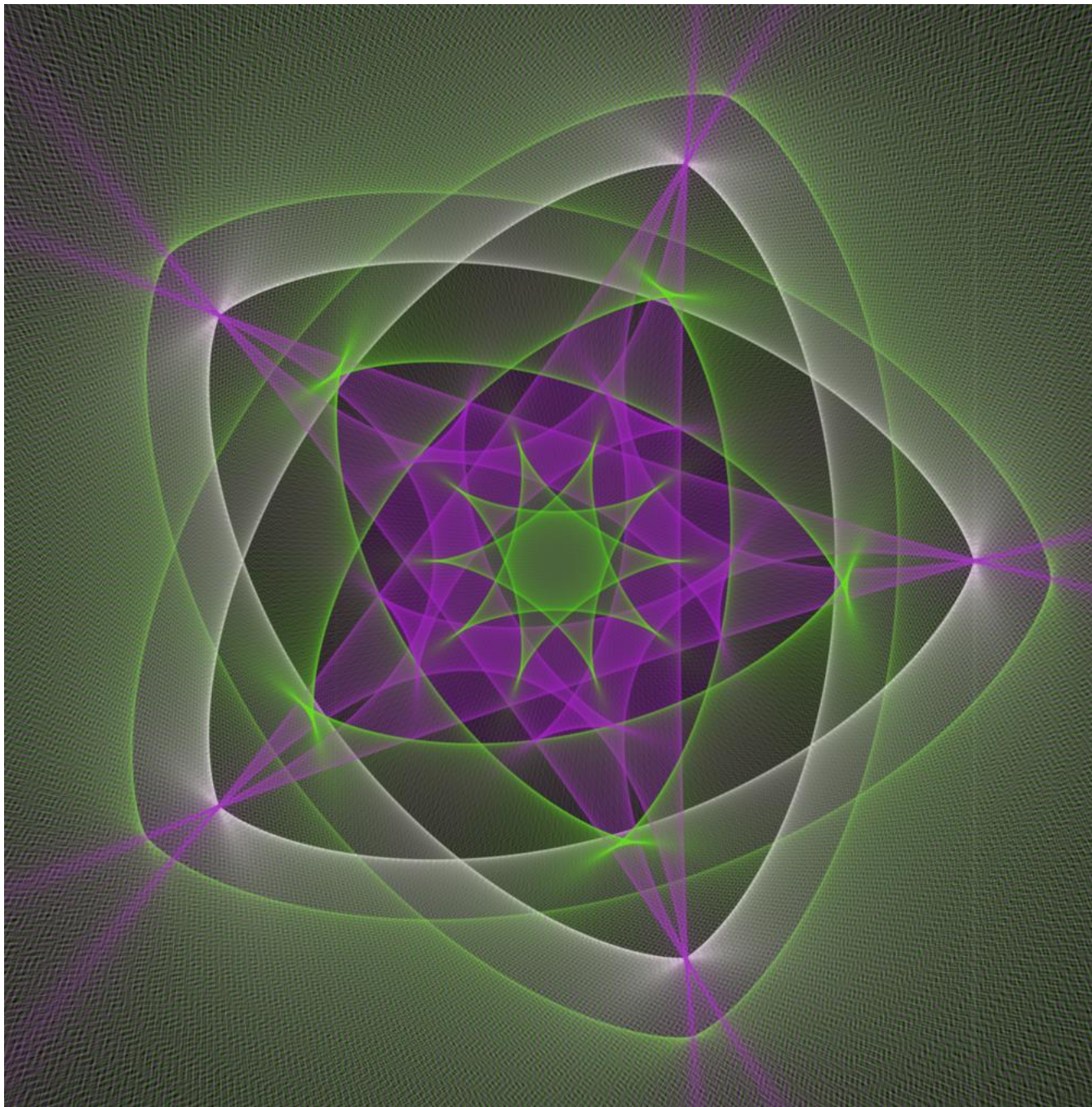
Dla uczniów, nauczycieli i wszystkich pasjonatów matematyki

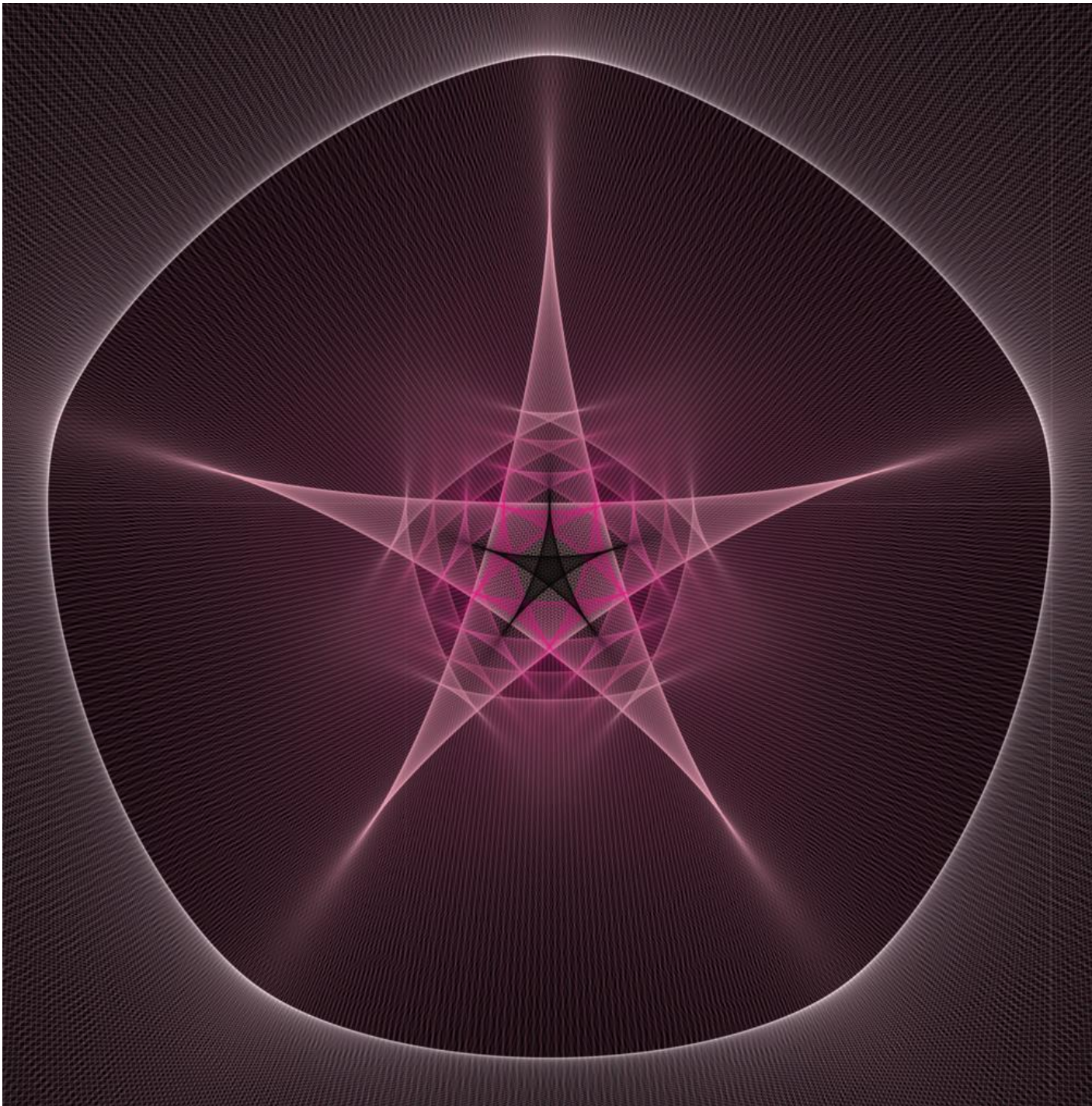
- Wykłady wraz z warsztatami odbywające się na wydziale MiNI PW
- Mniej więcej raz na miesiąc w soboty
- Najbliższa w kolejną sobotę o godzinie 14:00
- www.akademia.mini.pw.edu.pl

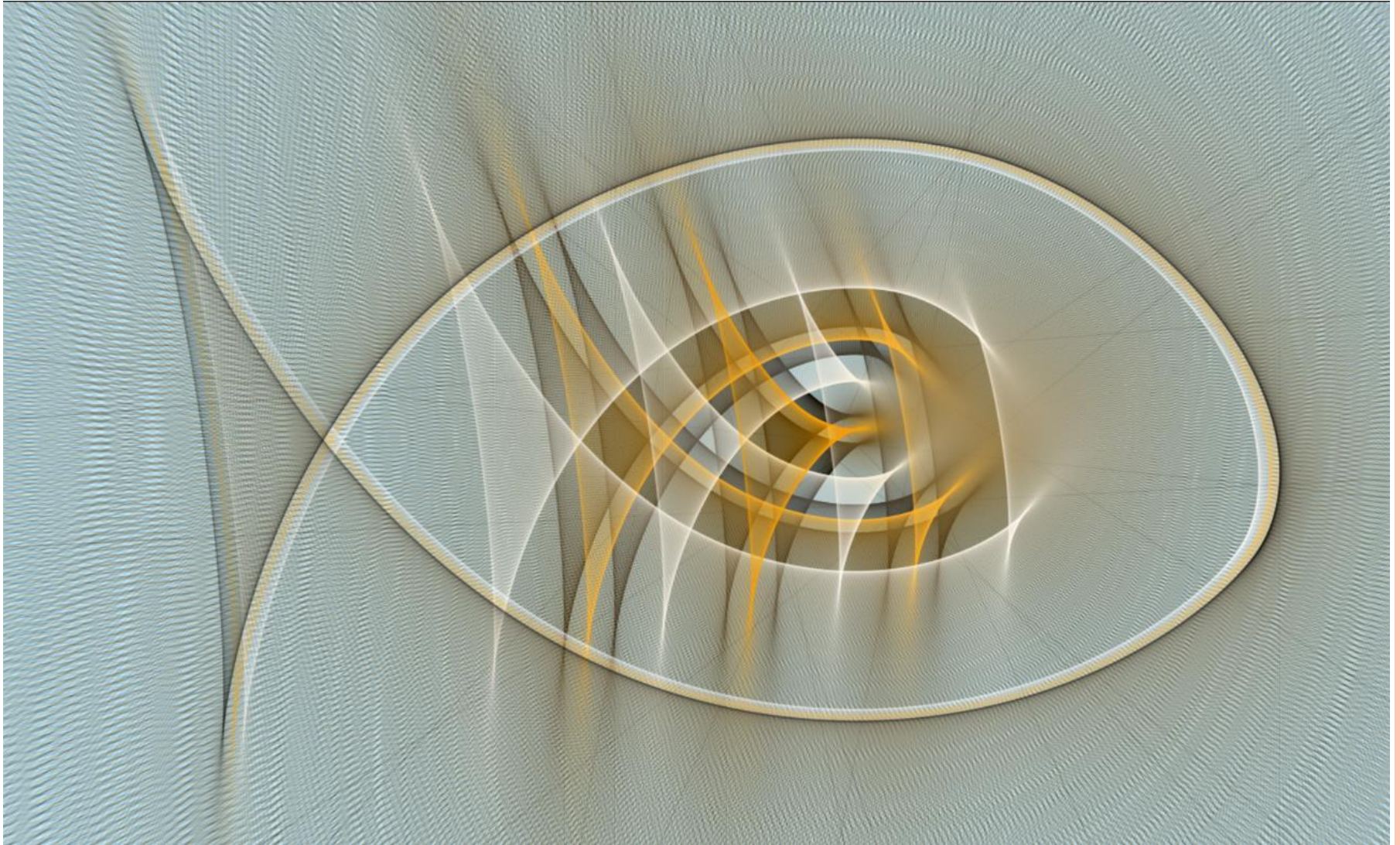


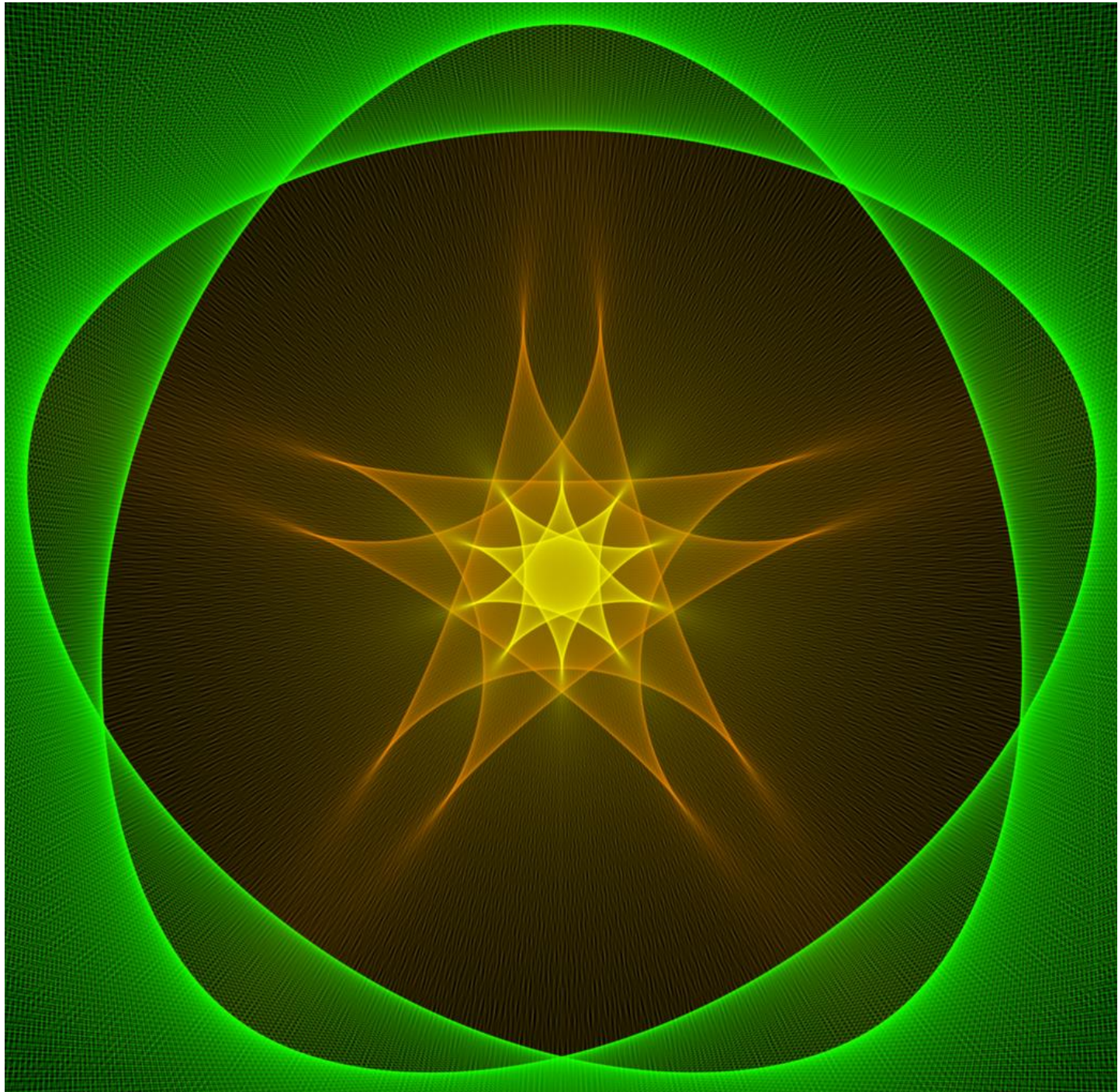
JESZCZE TROCHĘ O GEOMETRII

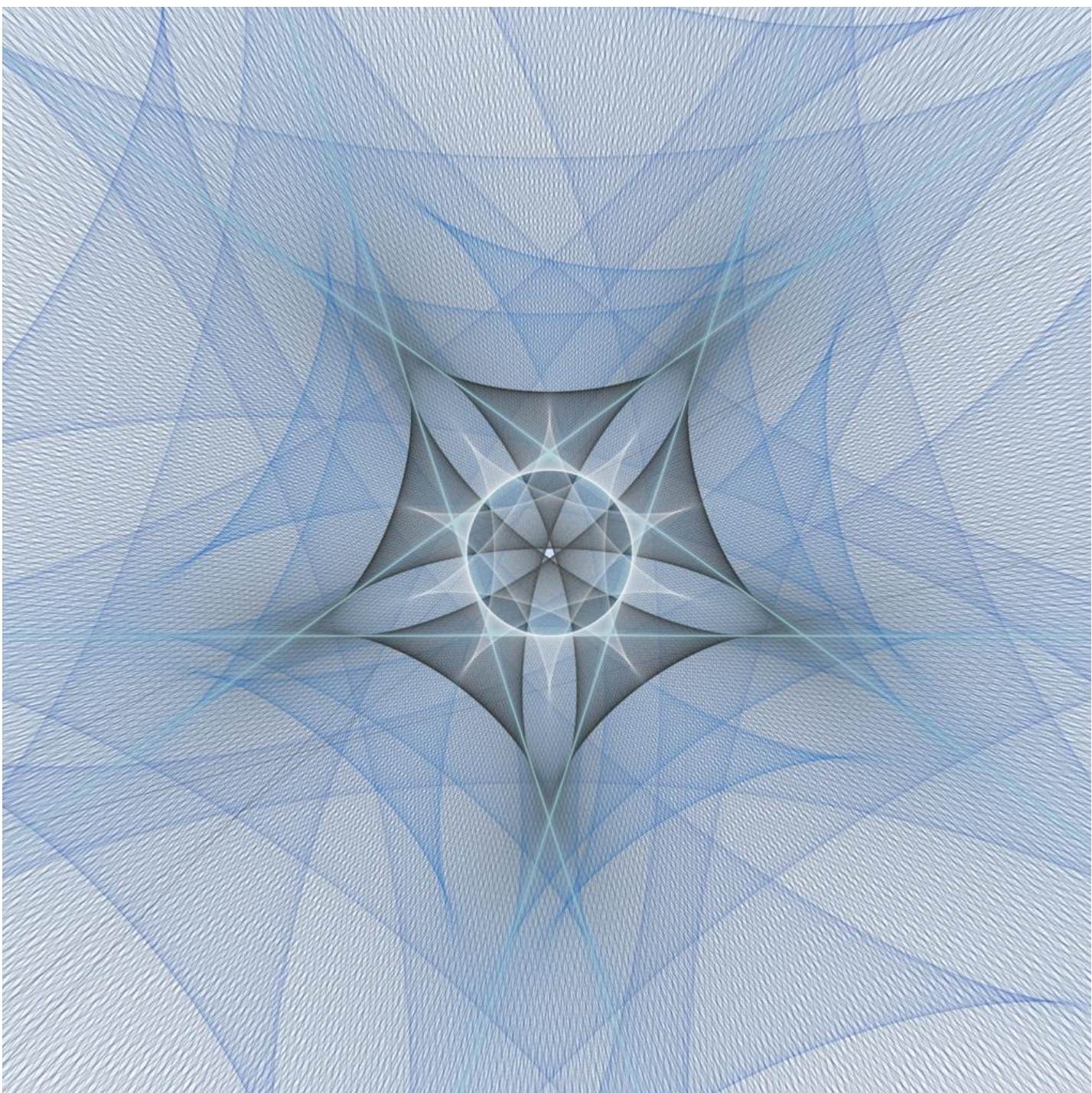








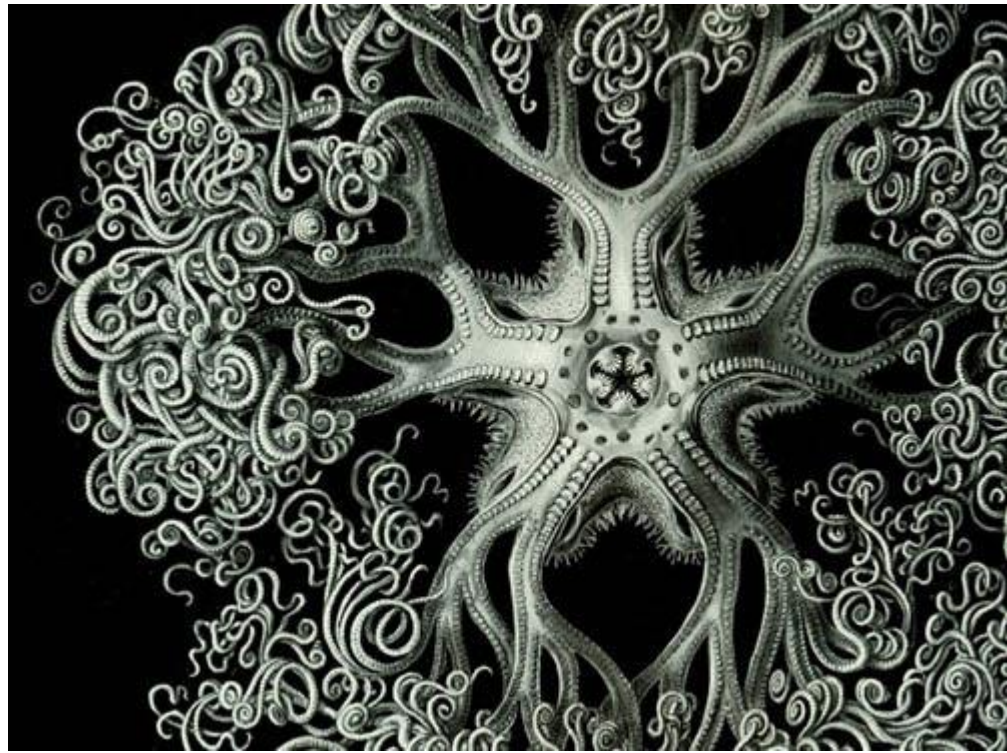






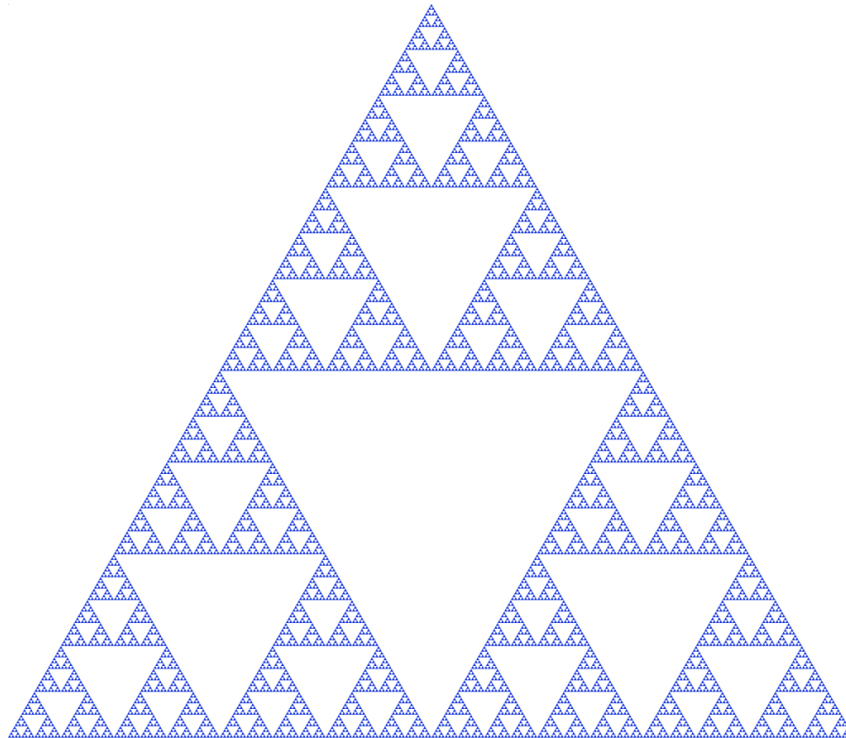
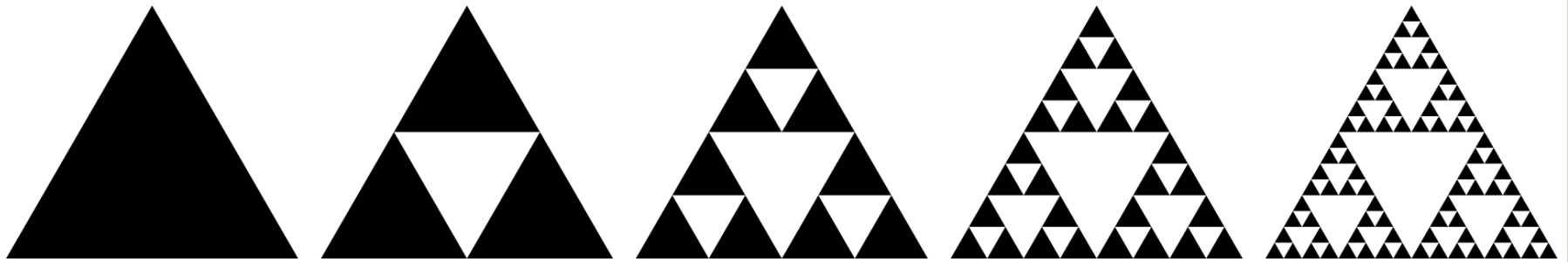
CZYM TAK NAPRAWDĘ SĄ FRAKTALE?

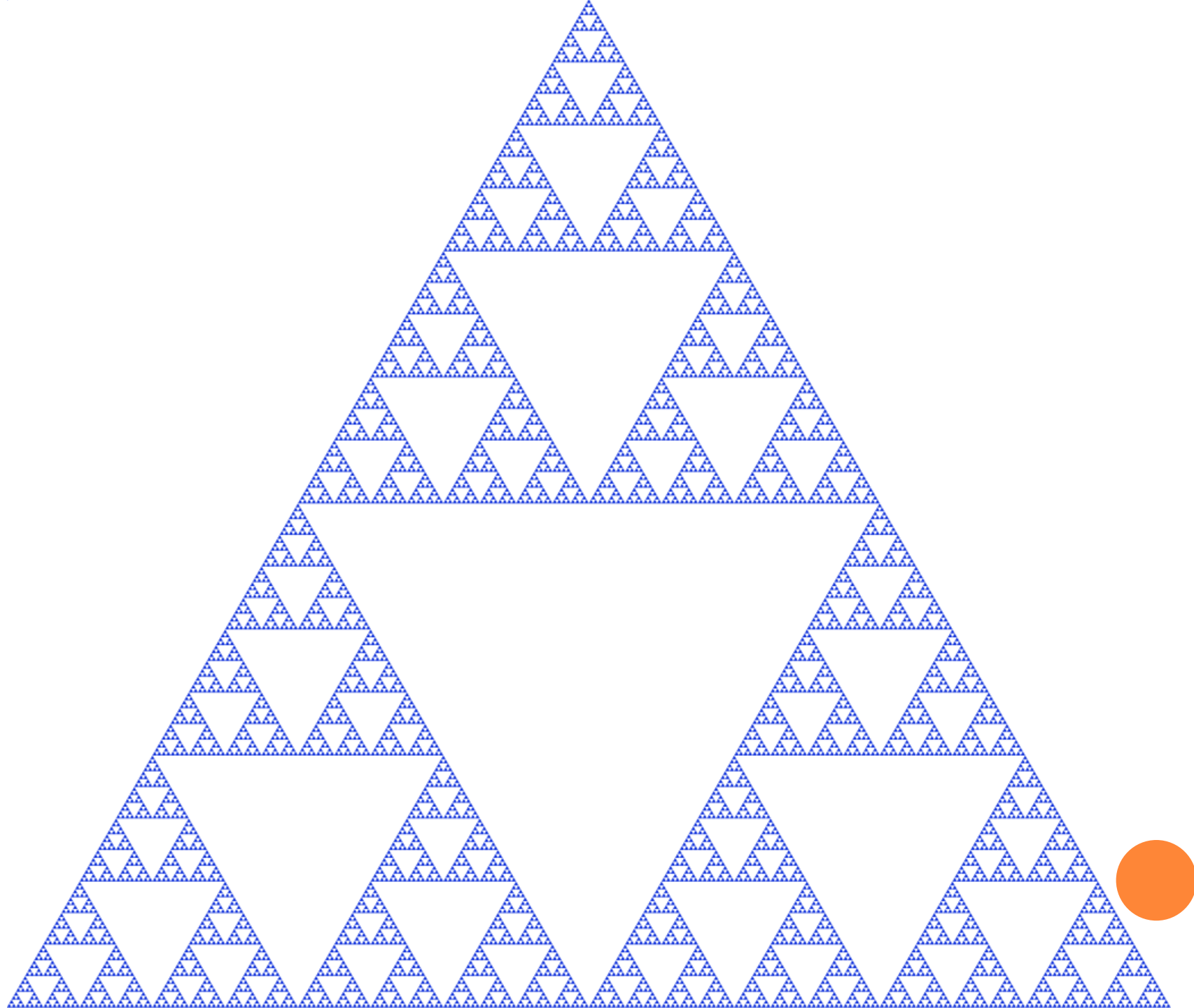
- Uniki przed podaniem ścisłej definicji...
- Mniej więcej: *pewna struktura wykazująca cechy samopodobieństwa*



KLASYCZNE FRAKTALE

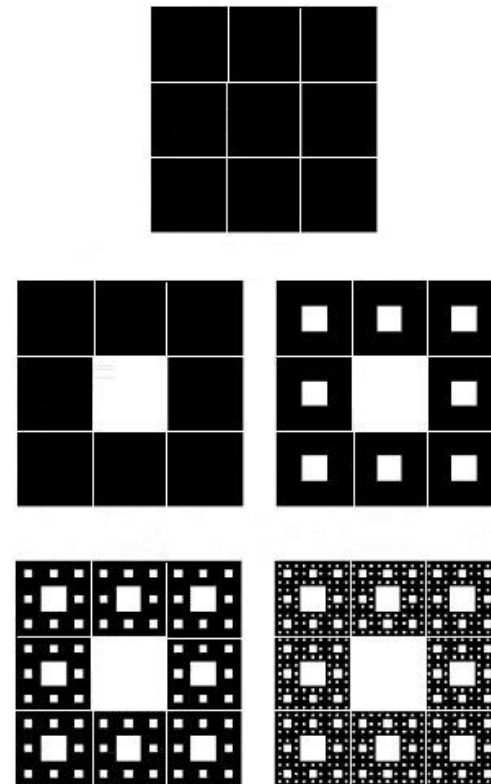
– TRÓJKĄT SIERPIŃSKIEGO

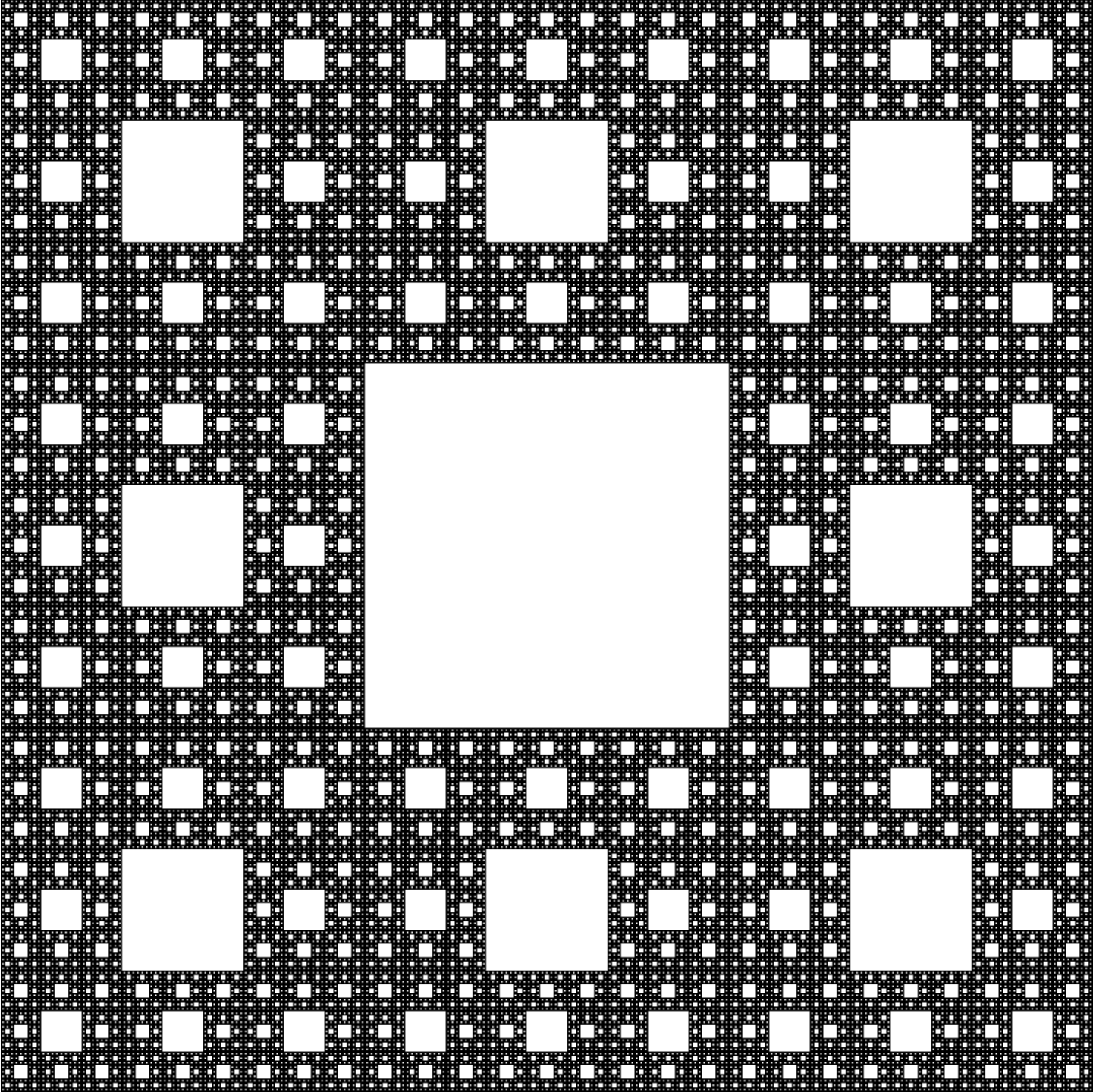




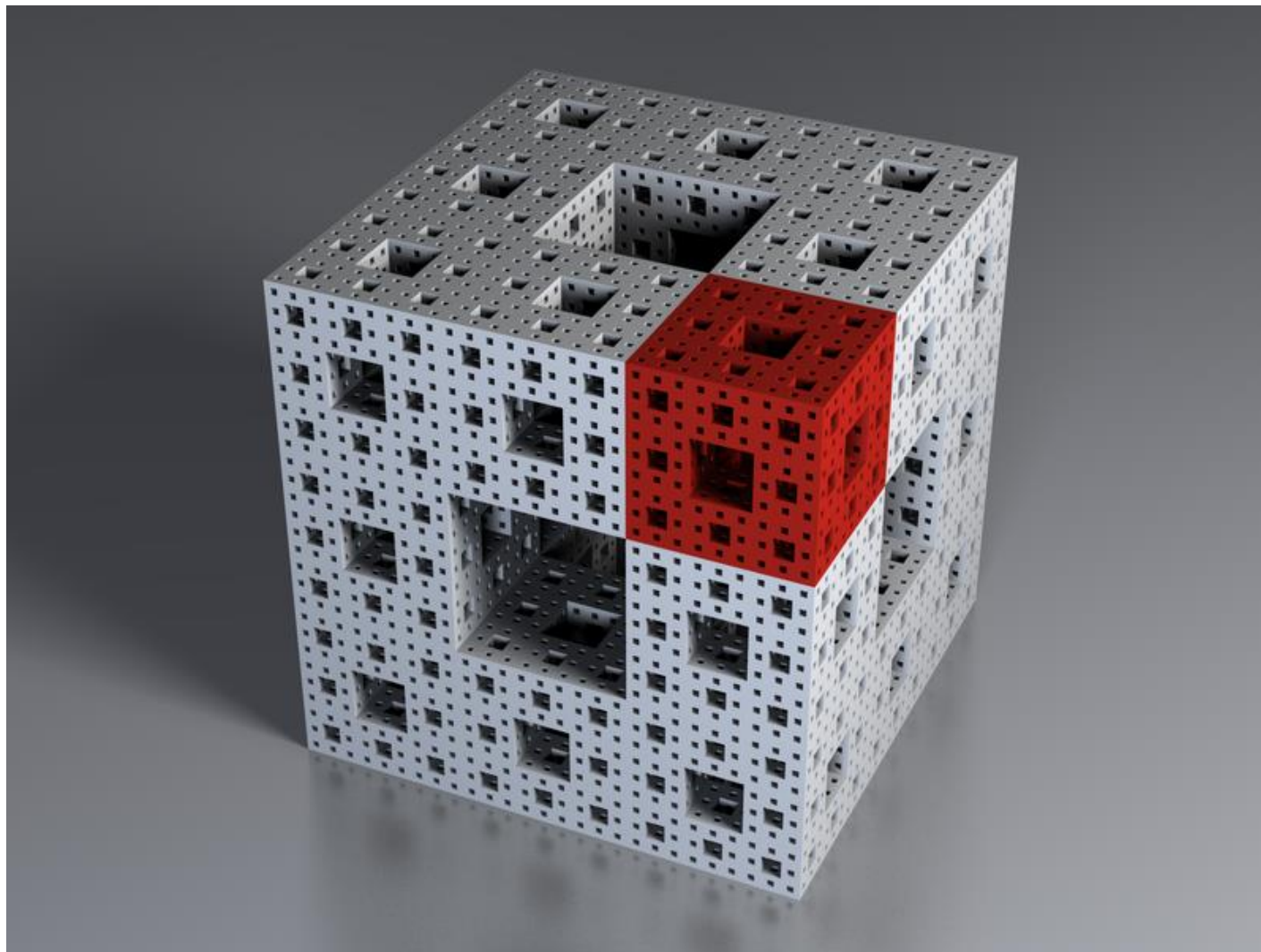
DYWAN SIERPIŃSKIEGO

- Wacław Sierpiński – słynny polski matematyk XX wieku z warszawskiej szkoły matematycznej. Zasłynął badaniami nad fraktalami. Zajmował się teorią liczb, analizą matematyczną, teorią kategorii, ...

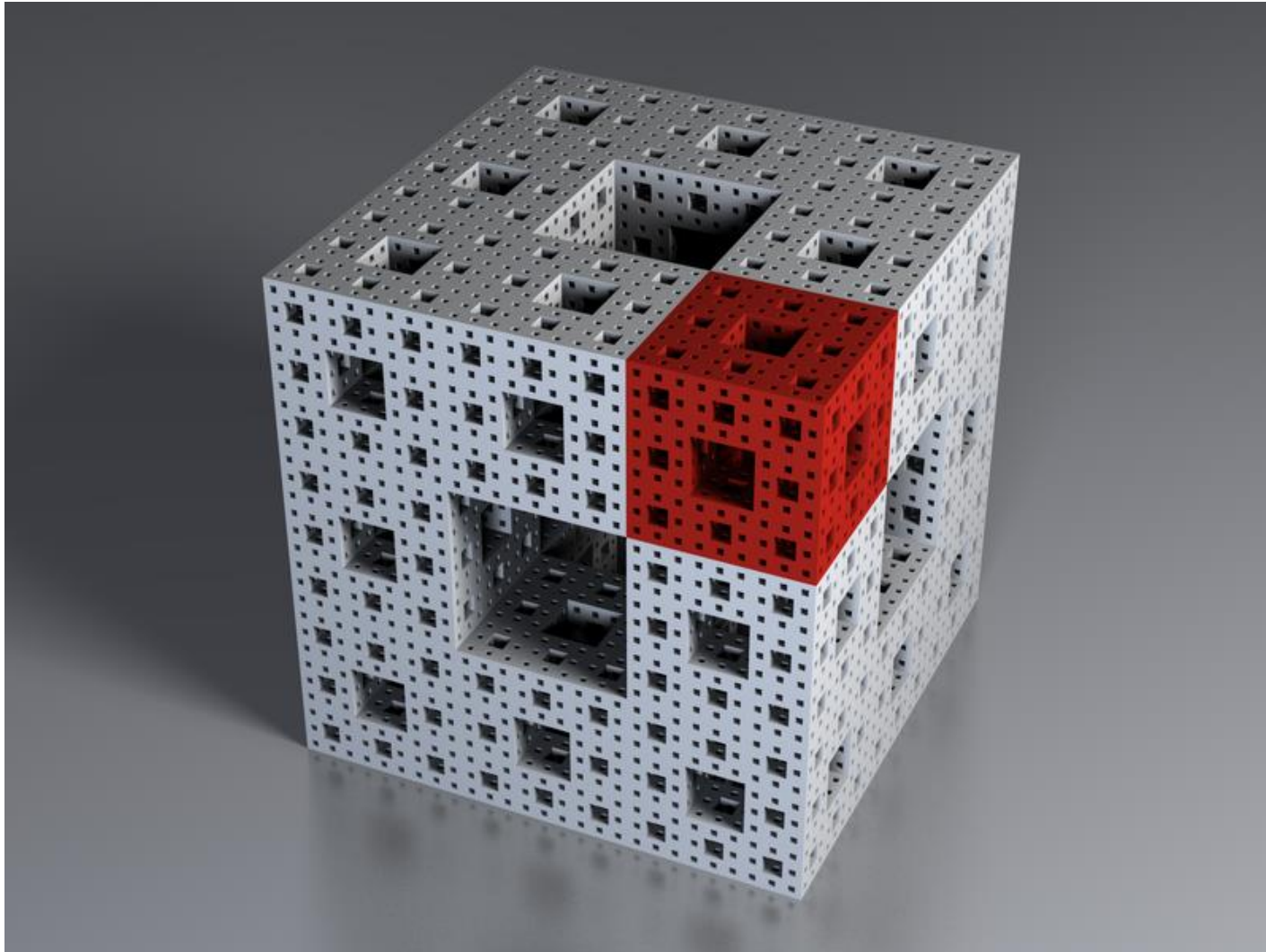




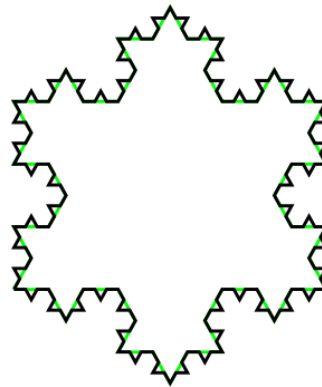
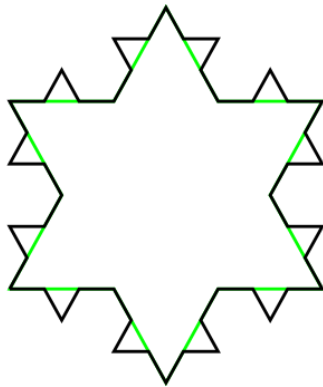
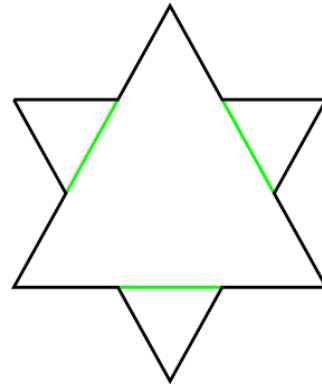
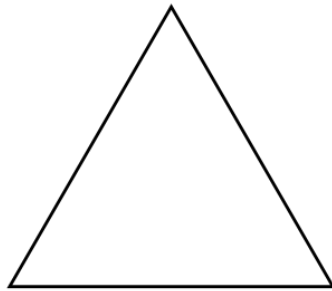
KOSTKA

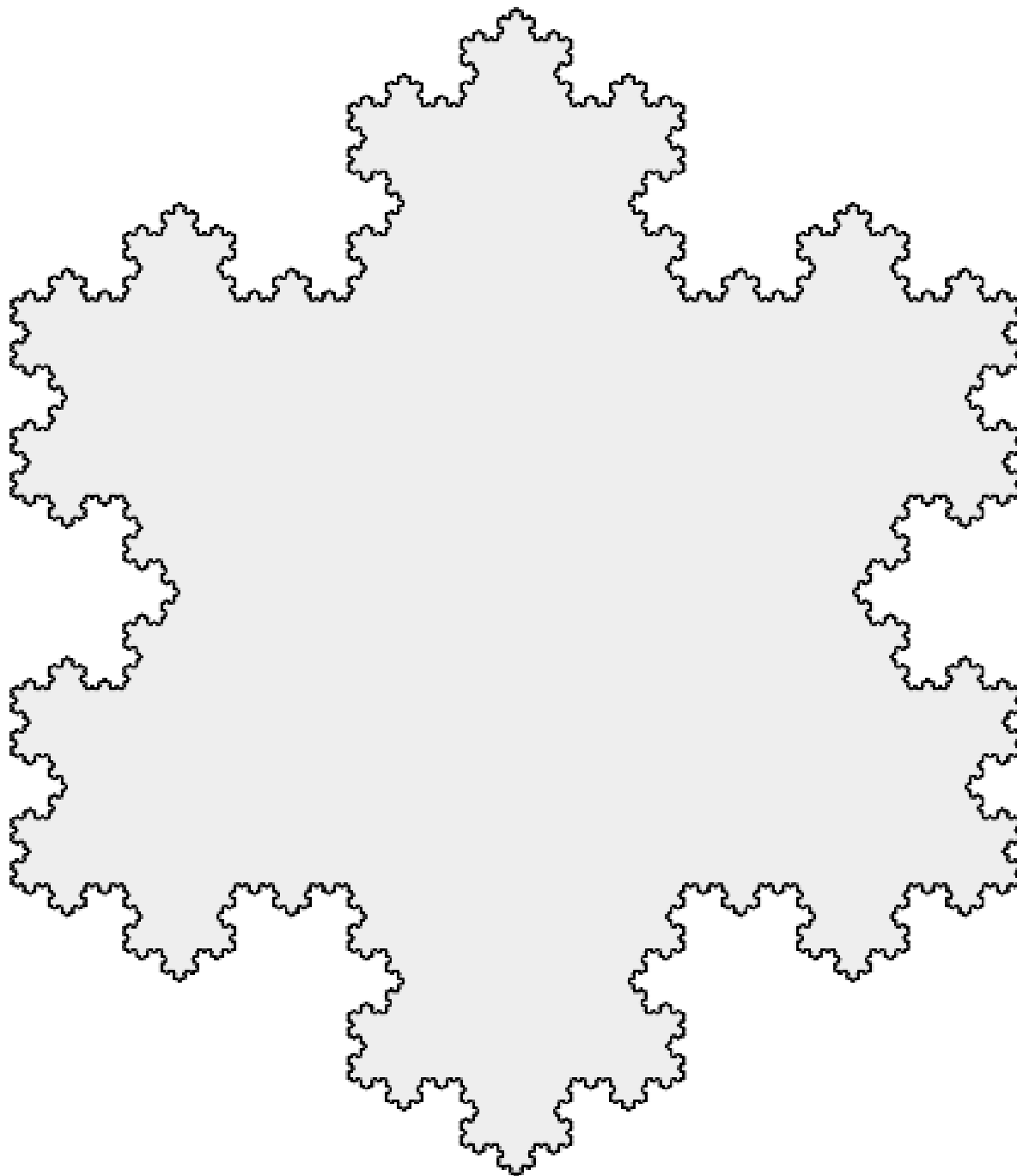


KOSTKA MENGERA



PŁATEK KOCHA





PŁATEK KOCHA

- Ma skończone pole powierzchni – oczywiste!
- A co z jego obwodem?
 - Zaczniemy od trójkąta o boku równym 1.
 - W każdej iteracji długość każdego boku zwiększa się $4/3$ -krotnie
 - Zatem w n -tym kroku obwód jest równy

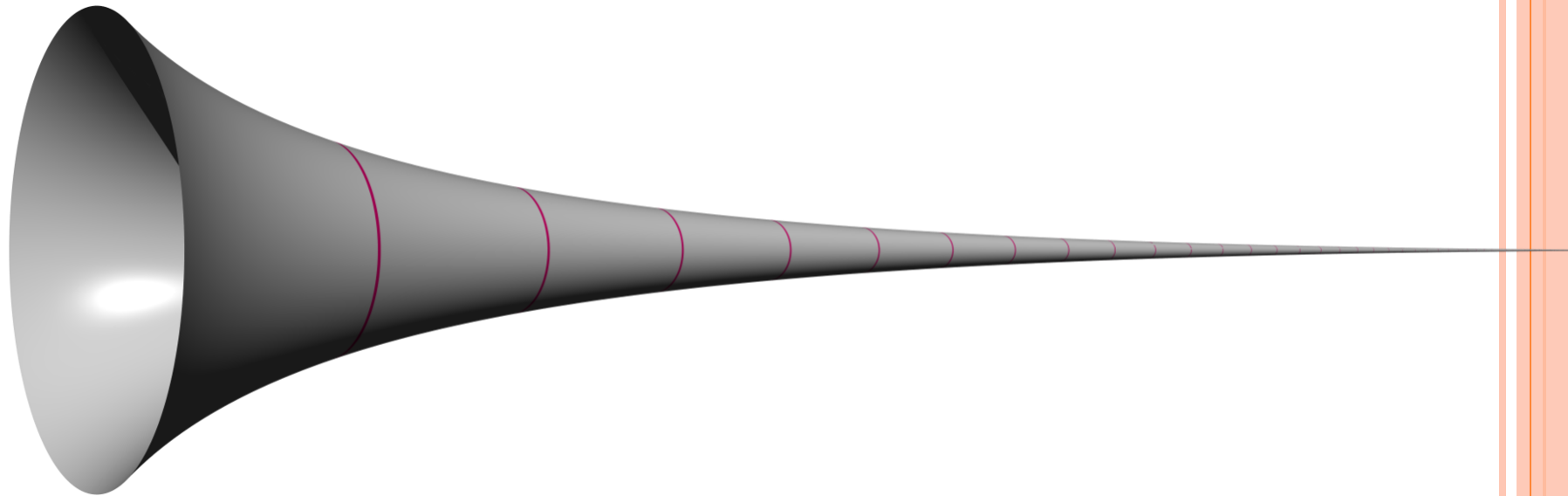
$$L_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

- Jeśli $n \rightarrow \infty$, to $L_n \rightarrow \infty$.



RÓG GABRIELA – PARADOKS MALARZA

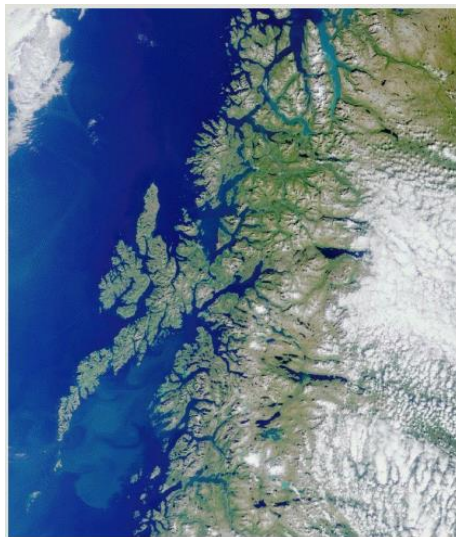
- Powstaje poprzez obrót fragmentu hiperboli wokół jej asymptoty

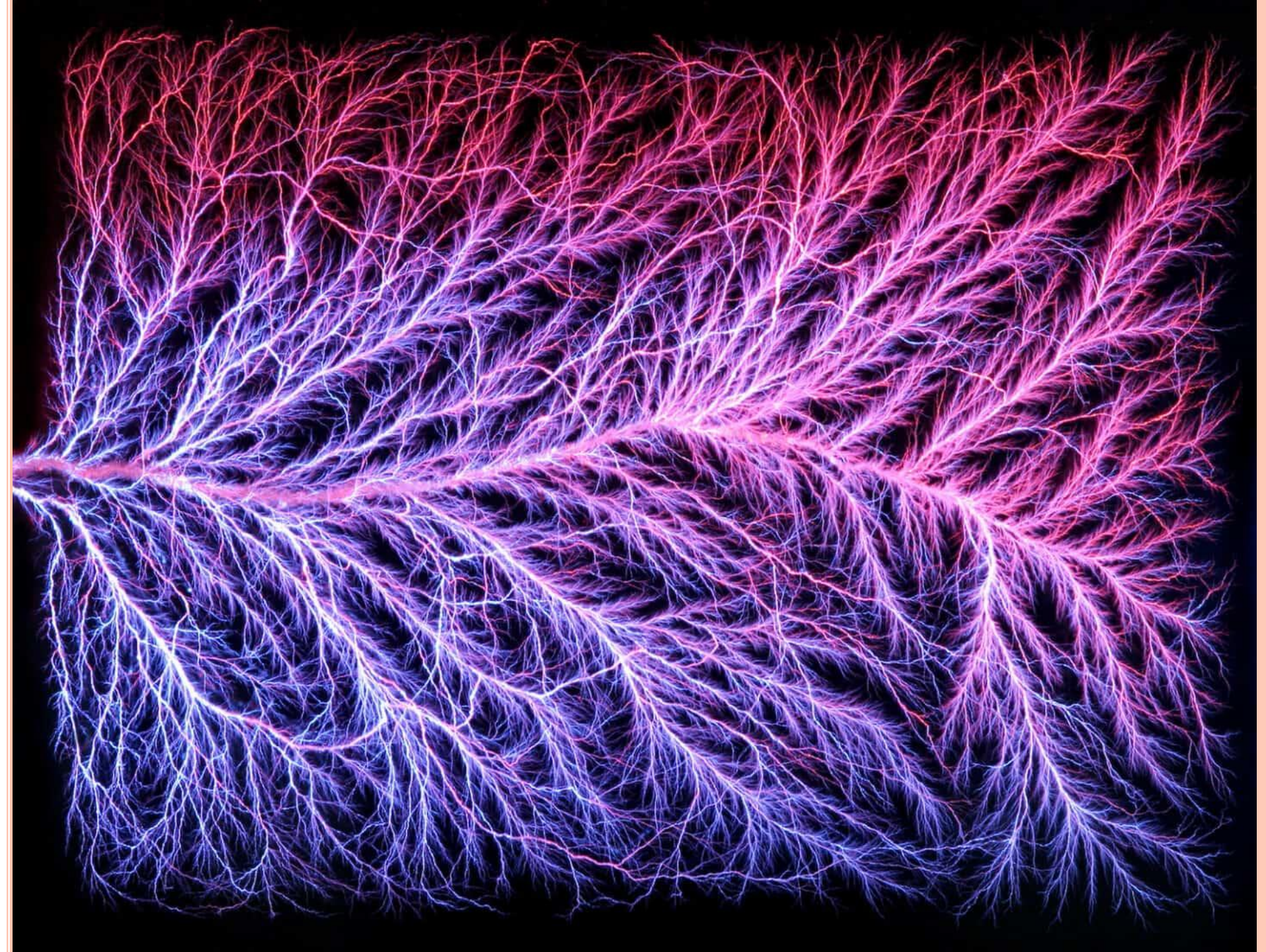


- Ma skończoną objętość, ale nieskończone pole...



FRAKTALE NA CO DZIEŃ





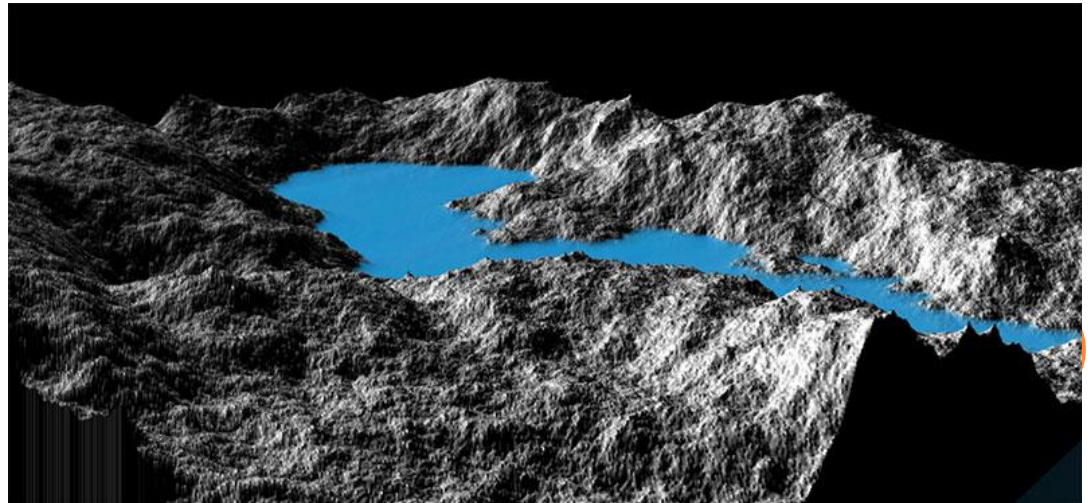
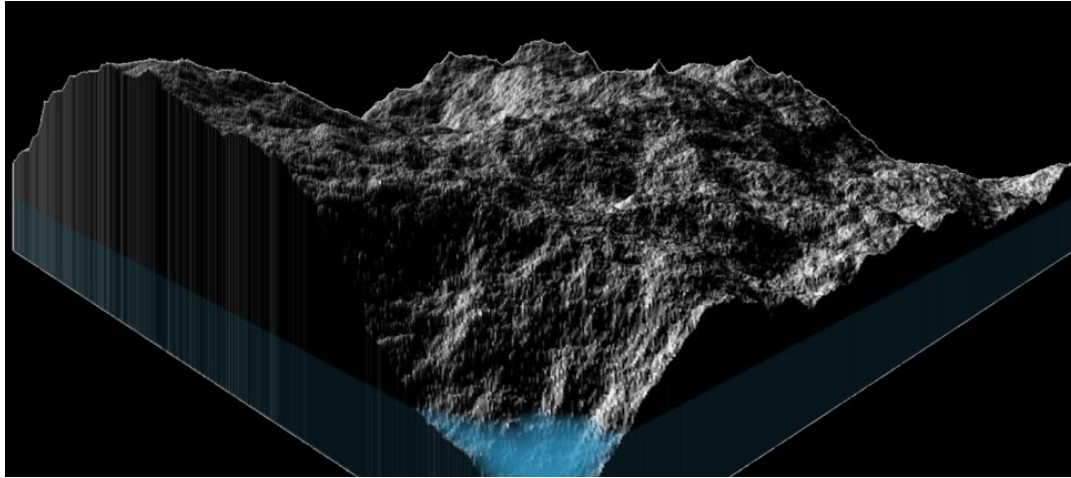
DERBY, AUSTRALIA





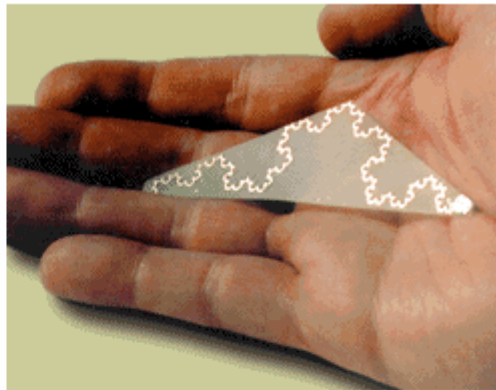
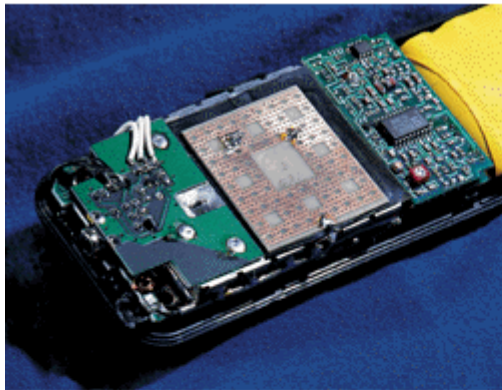
PO CO ONE SĄ?

- Generowanie (szybkie!) różnorodnych struktur



ANTENY FRAKTALNE

- Anteny powinny mieć samopodobną i symetryczną strukturę



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:

-

-

-

-

-

-

-

-

-

-



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:

- Alfabet symboli

-

-

-

-

-

-

-

-

-



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:

- Alfabet symboli
-
-

- Przykładowo:

- Alfabet: {F, +, -}
-
-
-
-



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:
 - Alfabet symboli
 -
 -
- Przykładowo:
 - Alfabet: {F, +, -}
 - „F” oznacza: „idź do przodu”
 - „+” oznacza: „skręć w prawo o kąt α ”
 - „-” oznacza: „skręć w lewo o kąt α ”
 -
 -



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:
 - Alfabet symboli
 - Słowo startowe (axiom)
 -
- Przykładowo:
 - Alfabet: {F, +, -}
 - „F” oznacza: „idź do przodu”
 - „+” oznacza: „skręć w prawo o kąt α ”
 - „-” oznacza: „skręć w lewo o kąt α ”
 -
 -



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:
 - Alfabet symboli
 - Słowo startowe (axiom)
 -
- Przykładowo:
 - Alfabet: {F, +, -}
 - „F” oznacza: „idź do przodu”
 - „+” oznacza: „skręć w prawo o kąt α ”
 - „-” oznacza: „skręć w lewo o kąt α ”
 - Axiom: „F”
 -



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:
 - Alfabet symboli
 - Słowo startowe (axiom)
 - Zasady modyfikacji słowa startowego
- Przykładowo:
 - Alfabet: {F, +, -}
 - „F” oznacza: „idź do przodu”
 - „+” oznacza: „skręć w prawo o kąt α ”
 - „-” oznacza: „skręć w lewo o kąt α ”
 - Axiom: „F”
 -



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:
 - Alfabet symboli
 - Słowo startowe (axiom)
 - Zasady modyfikacji słowa startowego
- Przykładowo:
 - Alfabet: {F, +, -}
 - „F” oznacza: „idź do przodu”
 - „+” oznacza: „skręć w prawo o kąt α ”
 - „-” oznacza: „skręć w lewo o kąt α ”
 - Axiom: „F”
 - Zasady: „F: F+F”



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:

- Alfabet symboli
- Słowo startowe (axiom)
- Zasady modyfikacji słowa startowego

- Przykładowo:

- Alfabet: {F, +, -}
 - „F” oznacza: „idź do przodu”
 - „+” oznacza: „skręć w prawo o kąt α ”
 - „-” oznacza: „skręć w lewo o kąt α ”
- Axiom: „F”
- Zasady: „F: F+F”

Wtedy pierwsze iteracja da nam słowo „F+F”,



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:

- Alfabet symboli
- Słowo startowe (axiom)
- Zasady modyfikacji słowa startowego

- Przykładowo:

- Alfabet: {F, +, -}
 - „F” oznacza: „idź do przodu”
 - „+” oznacza: „skręć w prawo o kąt α ”
 - „-” oznacza: „skręć w lewo o kąt α ”
- Axiom: „F”
- Zasady: „F: F+F”

Wtedy pierwsze iteracja da nam słowo „F+F”, a druga iteracja: „F+F+F+F”,



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:
 - Alfabet symboli
 - Słowo startowe (axiom)
 - Zasady modyfikacji słowa startowego

- Przykładowo:

- Alfabet: {F, +, -}
 - „F” oznacza: „idź do przodu”
 - „+” oznacza: „skręć w prawo o kąt α ”
 - „-” oznacza: „skręć w lewo o kąt α ”
- Axiom: „F”
- Zasady: „F: F+F”

Wtedy pierwsze iteracja da nam słowo „F+F”, a druga iteracja: „F+F+F+F”, a trzecia:



SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Składa się z trzech elementów:
 - Alfabet symboli
 - Słowo startowe (axiom)
 - Zasady modyfikacji słowa startowego

- Przykładowo:

- Alfabet: {F, +, -}
 - „F” oznacza: „idź do przodu”
 - „+” oznacza: „skręć w prawo o kąt α ”
 - „-” oznacza: „skręć w lewo o kąt α ”
- Axiom: „F”
- Zasady: „F: F+F”

Wtedy pierwsze iteracja da nam słowo „F+F”, a druga iteracja: „F+F+F+F”, a trzecia: „F+F+F+F+F+F+F+F”.



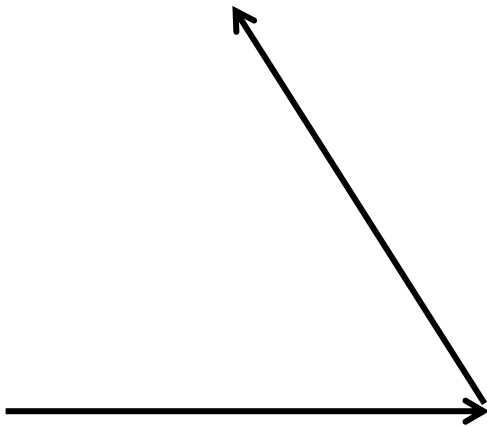
SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Rozważmy teraz axiom: „F--F--F” oraz zasadę:
„F: F+F--F+F”.



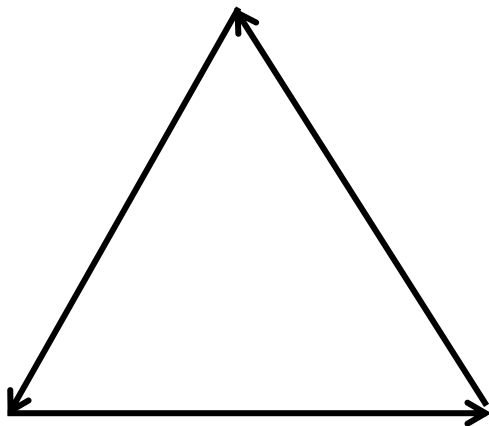
SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Rozważmy teraz axiom: „F--F--F” oraz zasadę: „F: F+F--F+F”.



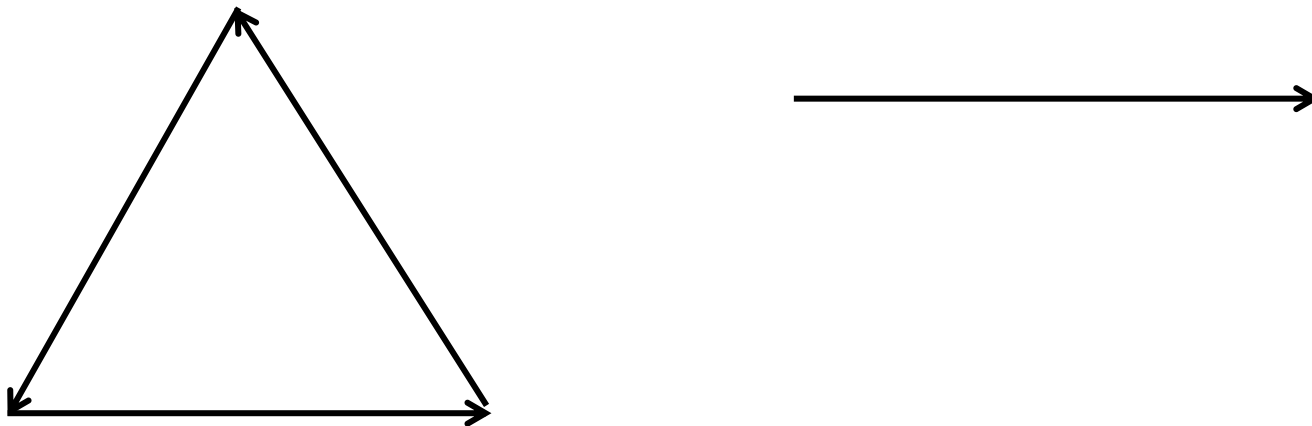
SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Rozważmy teraz axiom: „F--F--F” oraz zasadę: „F: F+F--F+F”.



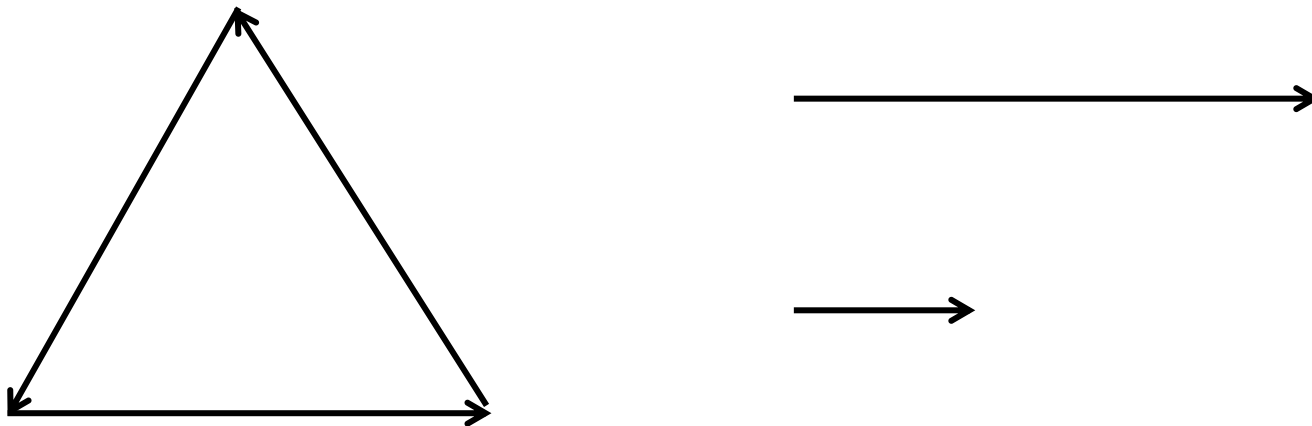
SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Rozważmy teraz axiom: „F--F--F” oraz zasadę: „F: F+F--F+F”.



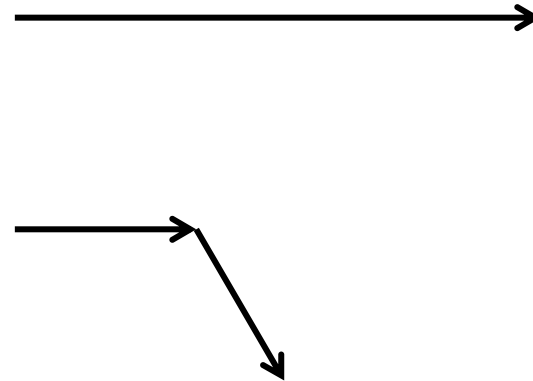
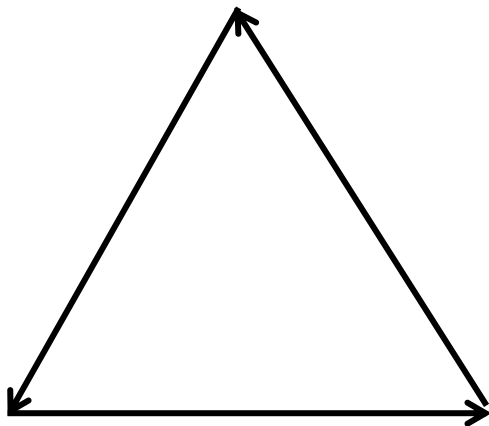
SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Rozważmy teraz axiom: „F--F--F” oraz zasadę: „F: F+F--F+F”.



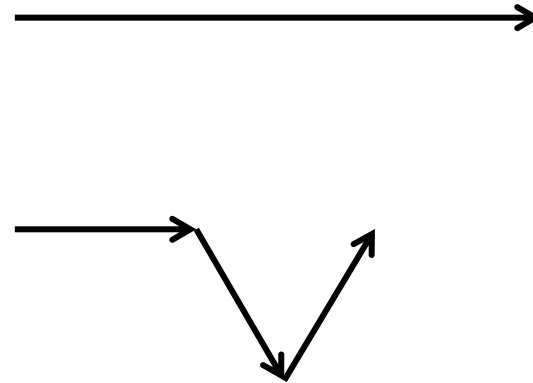
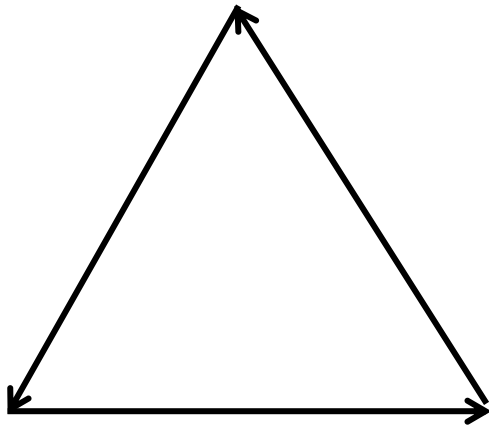
SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Rozważmy teraz axiom: „F--F--F” oraz zasadę: „F: F+F--F+F”.



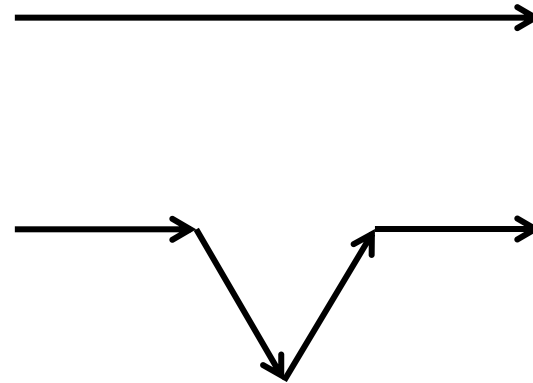
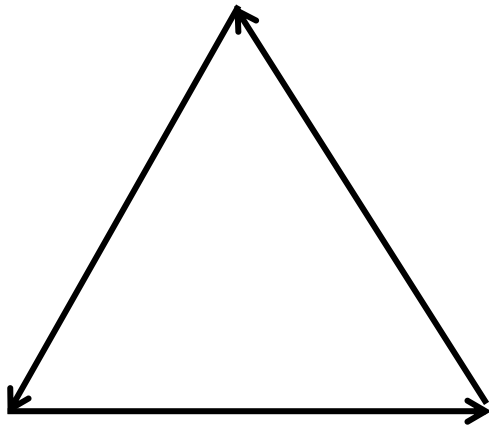
SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Rozważmy teraz axiom: „F--F--F” oraz zasadę: „F: F+F--F+F”.



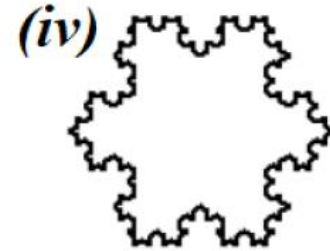
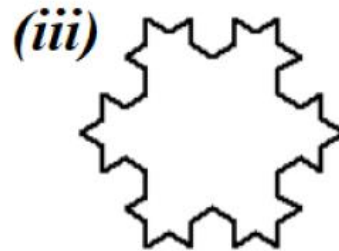
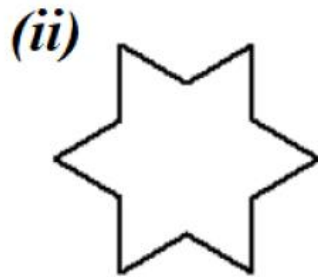
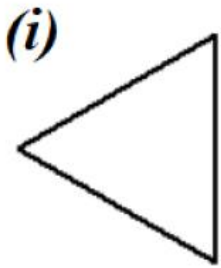
SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

- Rozważmy teraz axiom: „F--F--F” oraz zasadę: „F: F+F--F+F”.

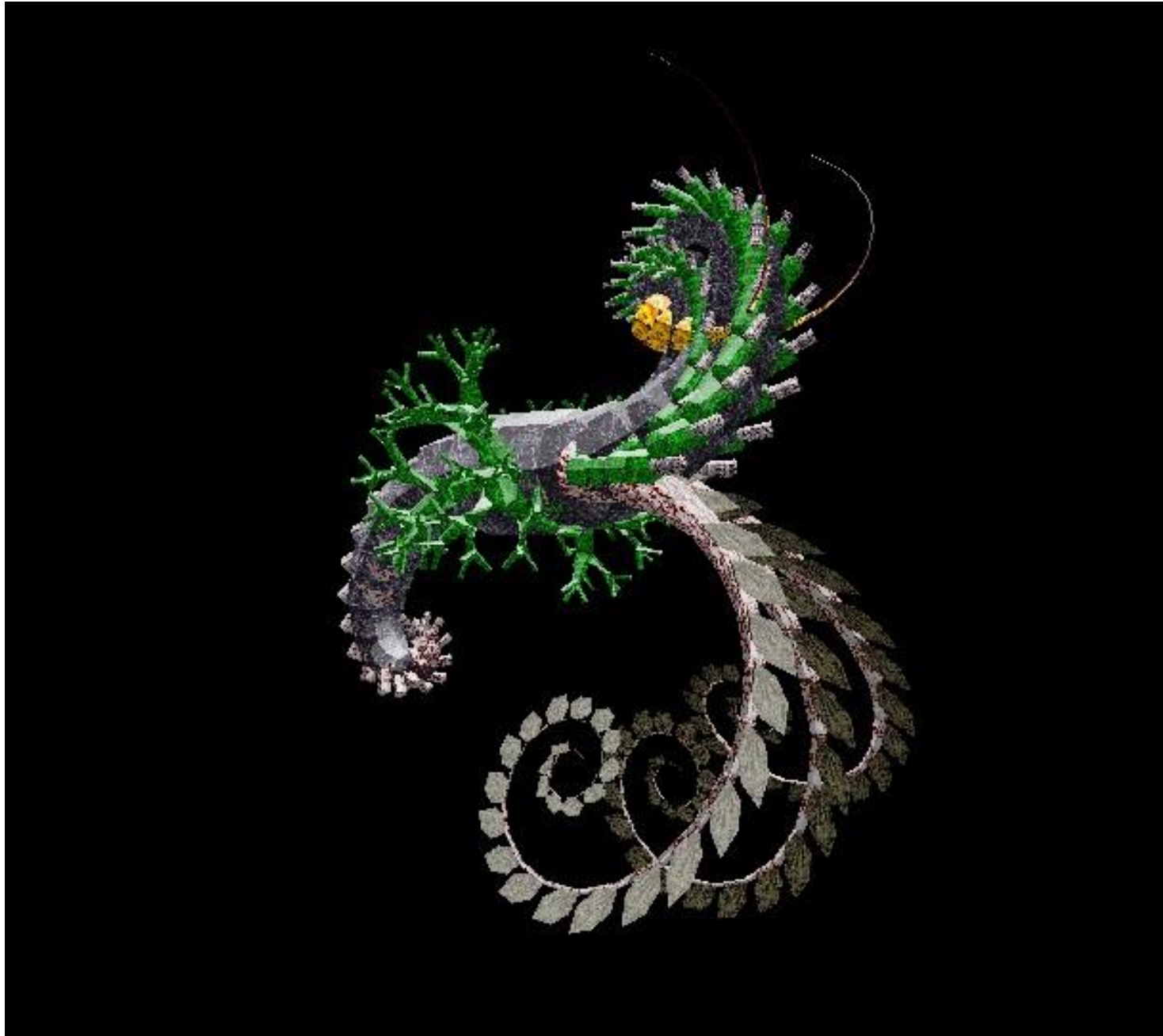


SYSTEM LINDENMAYERA (L-SYSTEM)

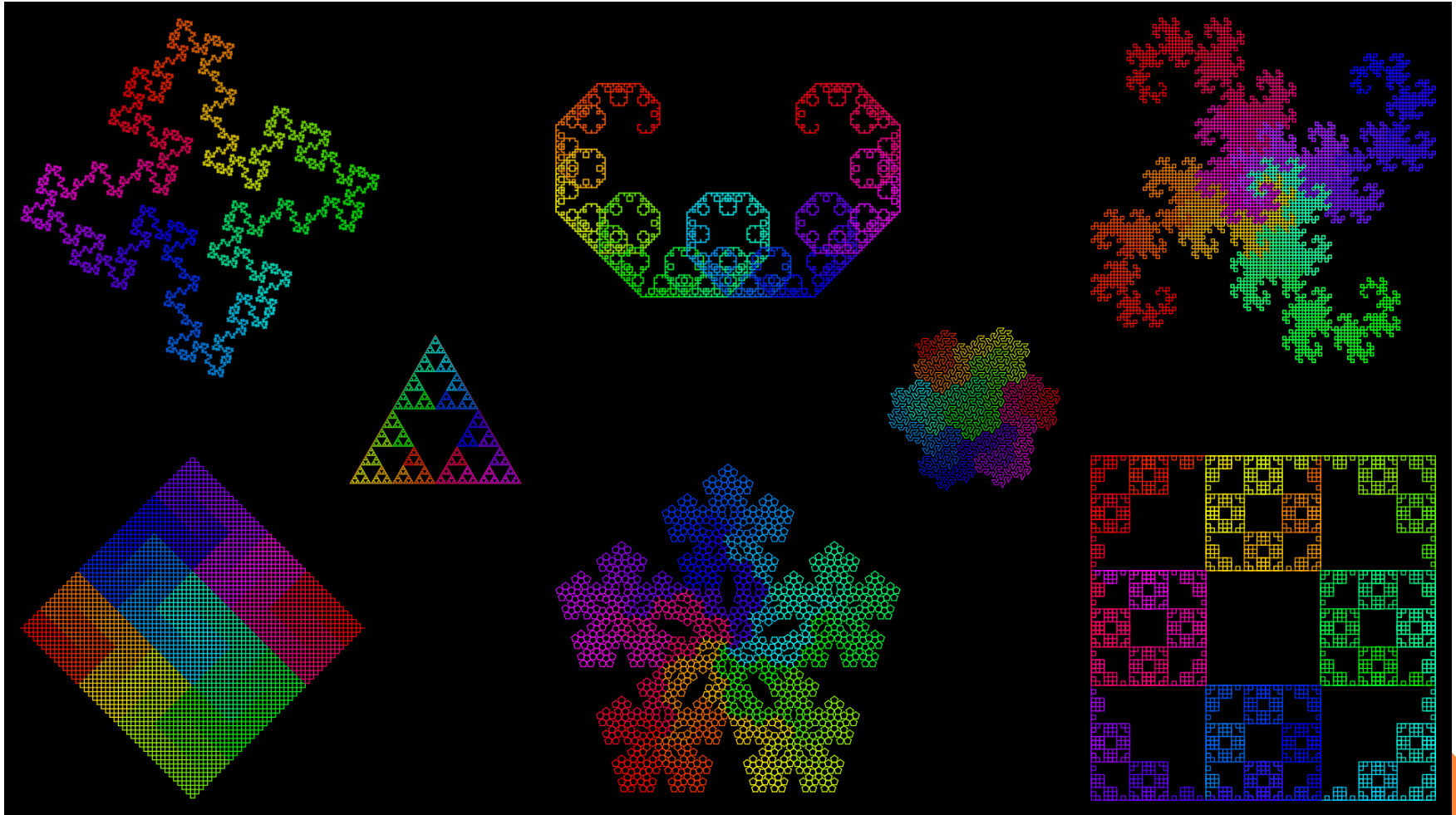
- Rozważmy teraz axiom: „F--F--F” oraz zasadę:
„F: F+F--F+F”.



AIRHORSE



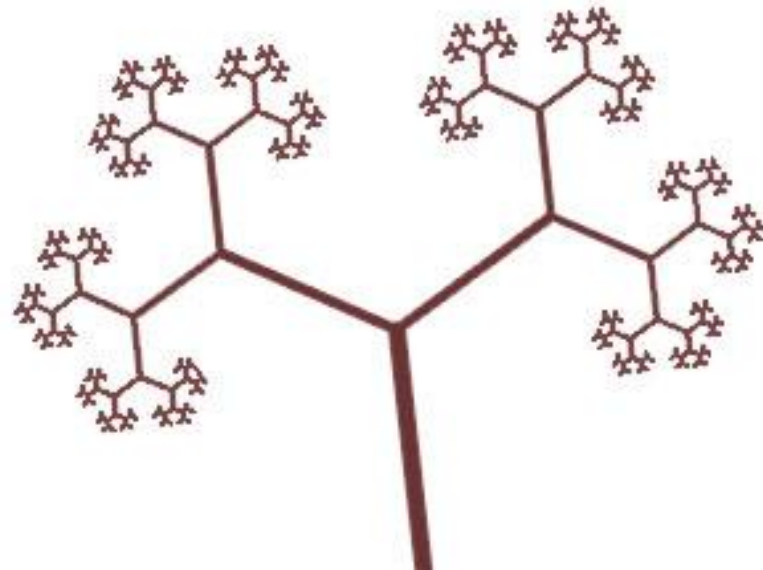
L-SYSTEM



L-SYSTEM

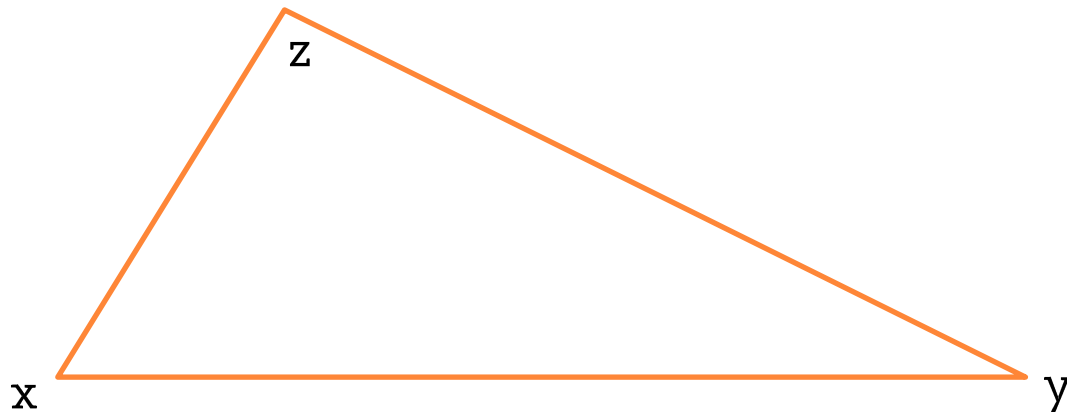


L-SYSTEM W NATURZE

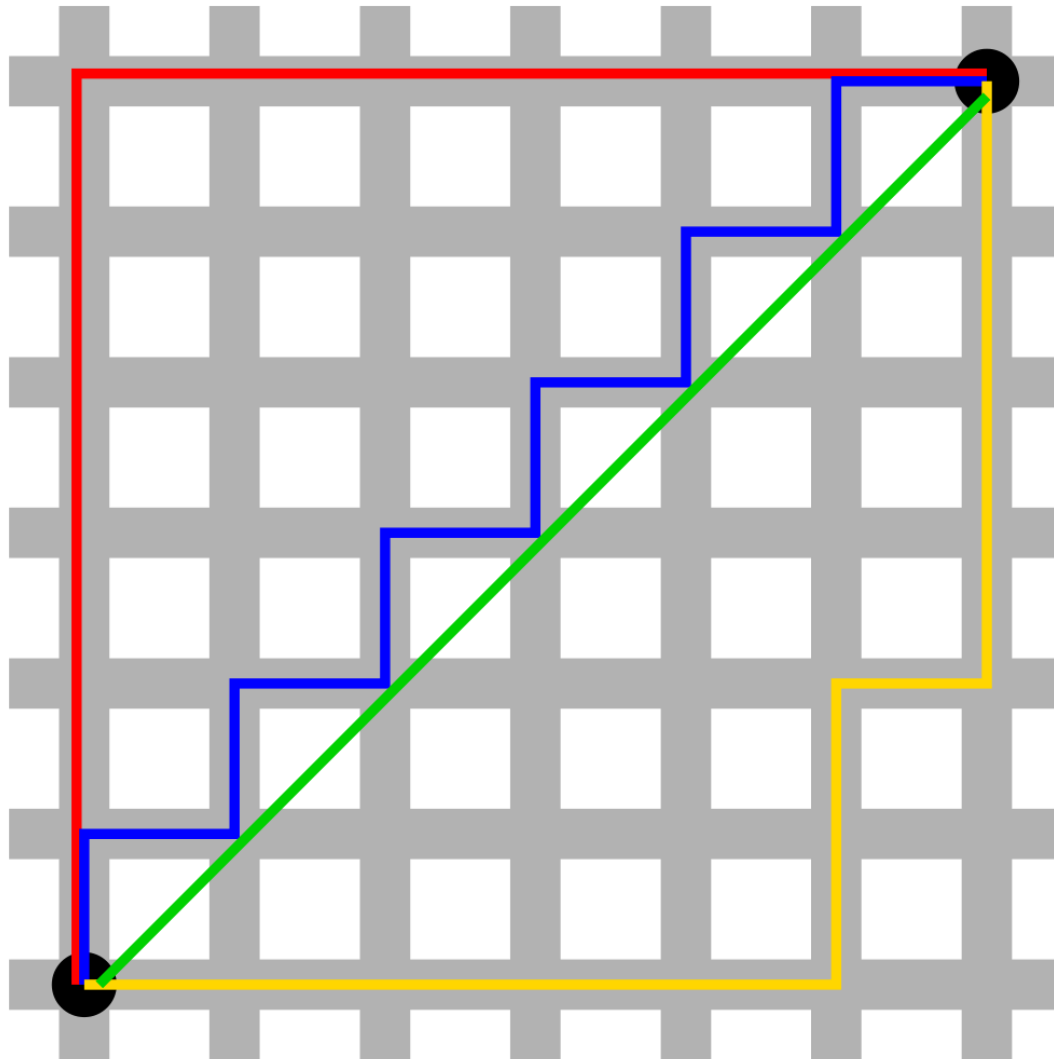


TO TERAZ... POMIERZYM Y ODLEGŁOŚCI

- Metryką nazwiemy funkcję $d(x, y)$, która dwóm elementom x, y jakiegoś zbioru będzie zwracała „odległość między tymi elementami”. Własności:
 - $d(x, y) \geq 0$
 - $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$.
 - $d(x, y) = d(y, x)$.
 - $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$



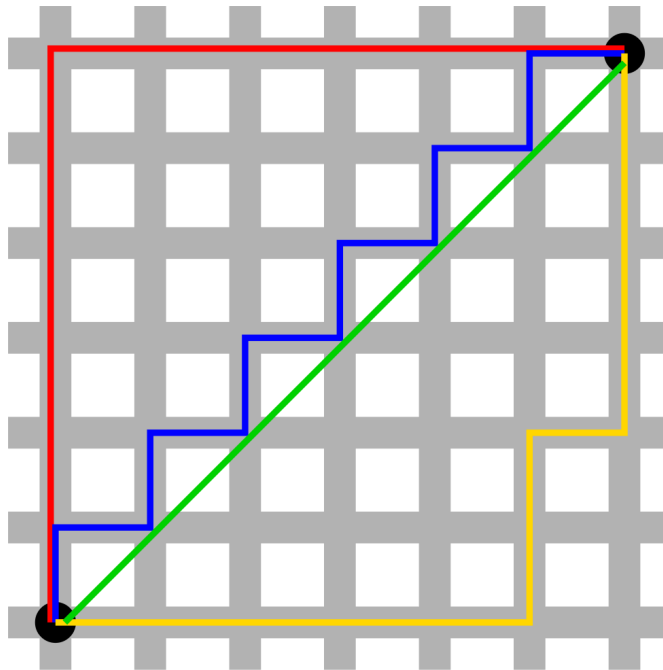
METRYKA TAKSÓWKOWA



METRYKA TAKSÓWKOWA

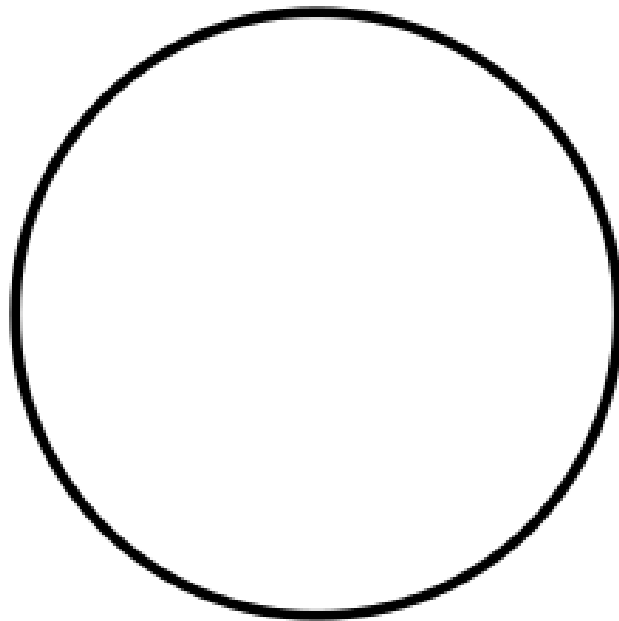
- W układzie współrzędnych metryka taksówkowa dana jest wzorem

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$



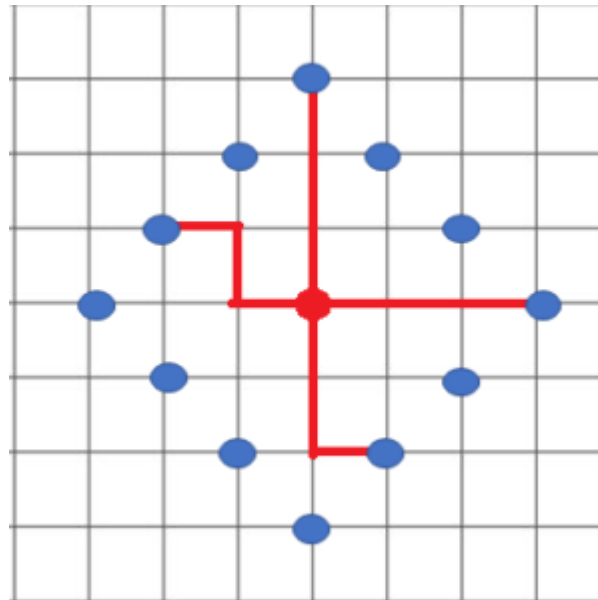
CO TO JEST OKRĄG/SFERA O ŚRODKU W PUNKCIE S I PROMIENIU R ?

- Jest to zbiór punktów w „odległości” R od środka S .
- Przyjmijmy $S = (0,0)$ oraz $R = 3$.
- Jeśli rozważymy zwykłą odległość (zwaną euklidesową), to otrzymamy oczywiście



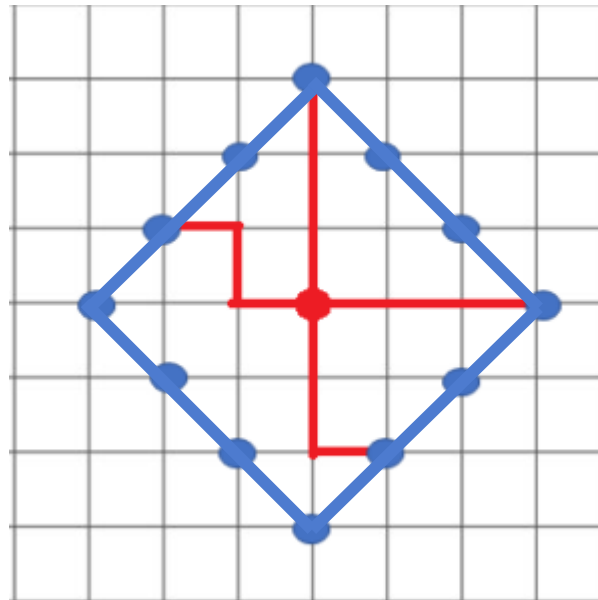
CO TO JEST OKRĄG/SFERA O ŚRODKU W PUNKCIE S I PROMIENIU R ?

- Jest to zbiór punktów w „odległości” R od środka S .
- Przyjmijmy $S = (0,0)$ oraz $R = 3$.
- Jeśli rozważymy metrykę taksówkową, to:



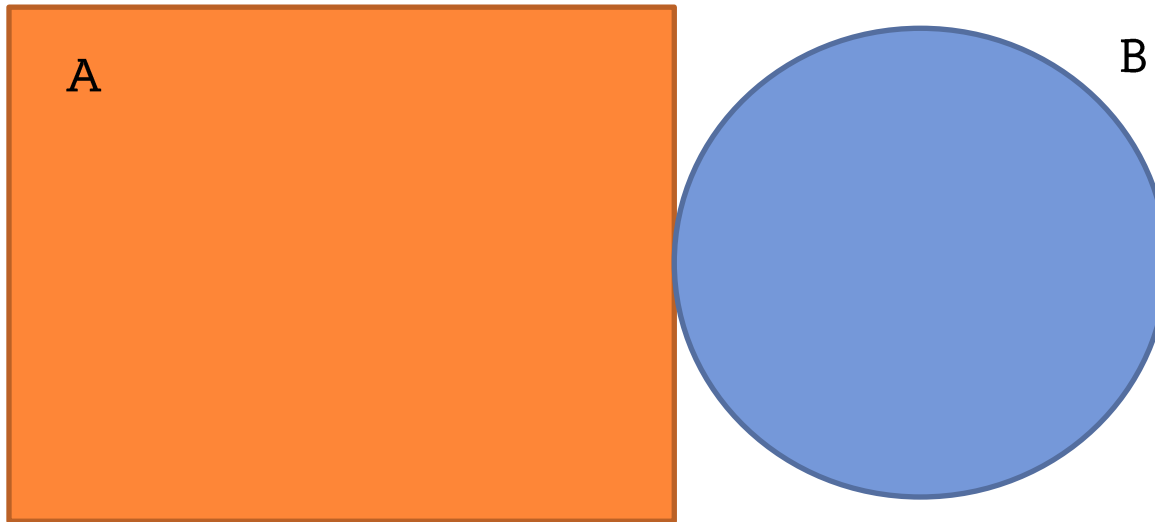
CO TO JEST OKRĄG/SFERA O ŚRODKU W PUNKCIE S I PROMIENIU R ?

- Jest to zbiór punktów w „odległości” R od środka S .
- Przyjmijmy $S = (0,0)$ oraz $R = 3$.
- Jeśli rozważymy metrykę taksówkową, to:



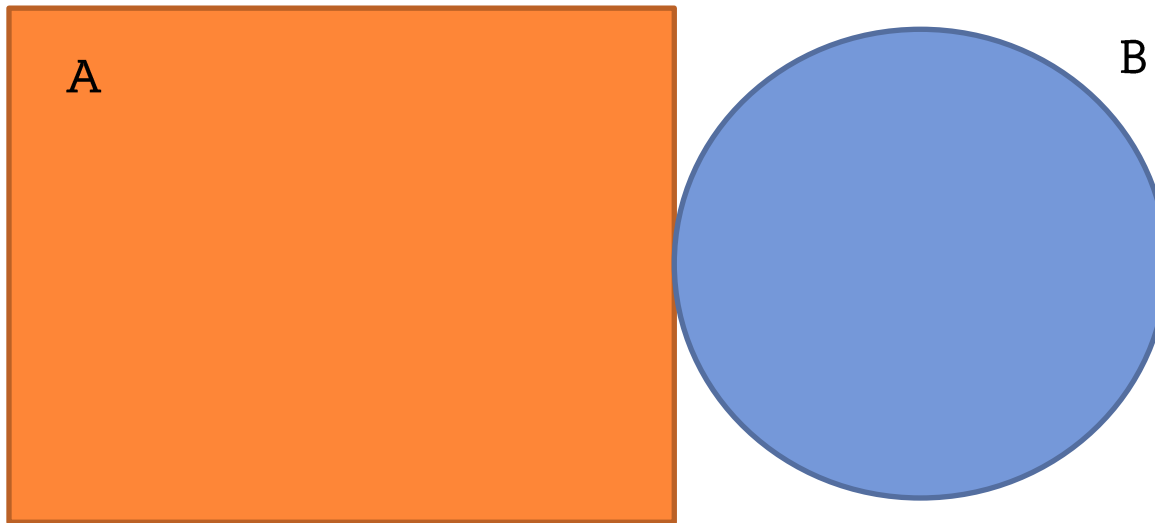
ODLEGŁOŚĆ MIĘDZY ZBIORAMI

- Jaka jest odległość między następującymi zbiorami?



ODLEGŁOŚĆ MIĘDZY ZBIORAMI

- Jaka jest odległość między następującymi zbiorami?

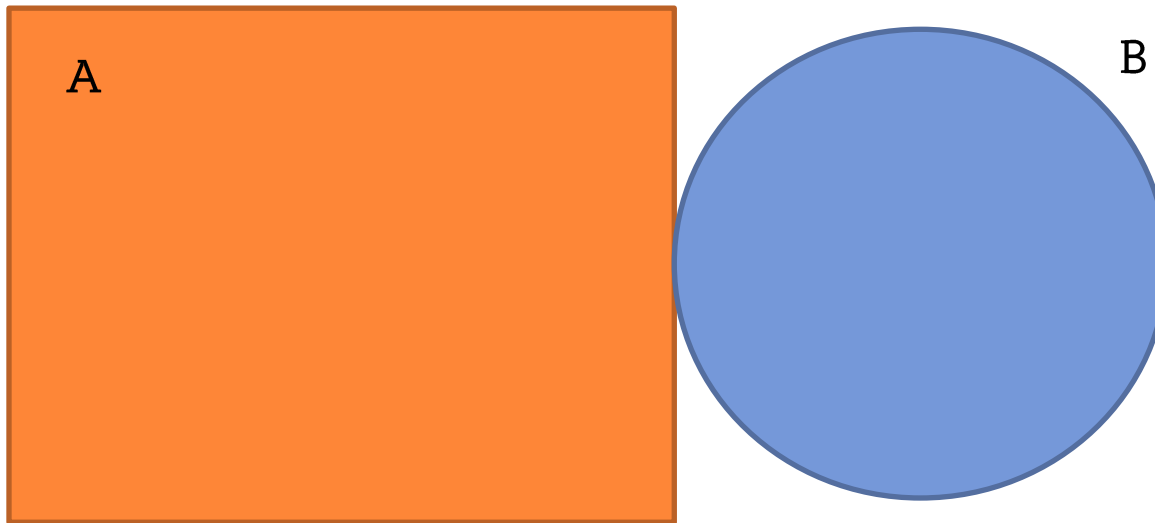


$$d(A,B)=0?$$



ODLEGŁOŚĆ MIĘDZY ZBIORAMI

- Jaka jest odległość między następującymi zbiorami?



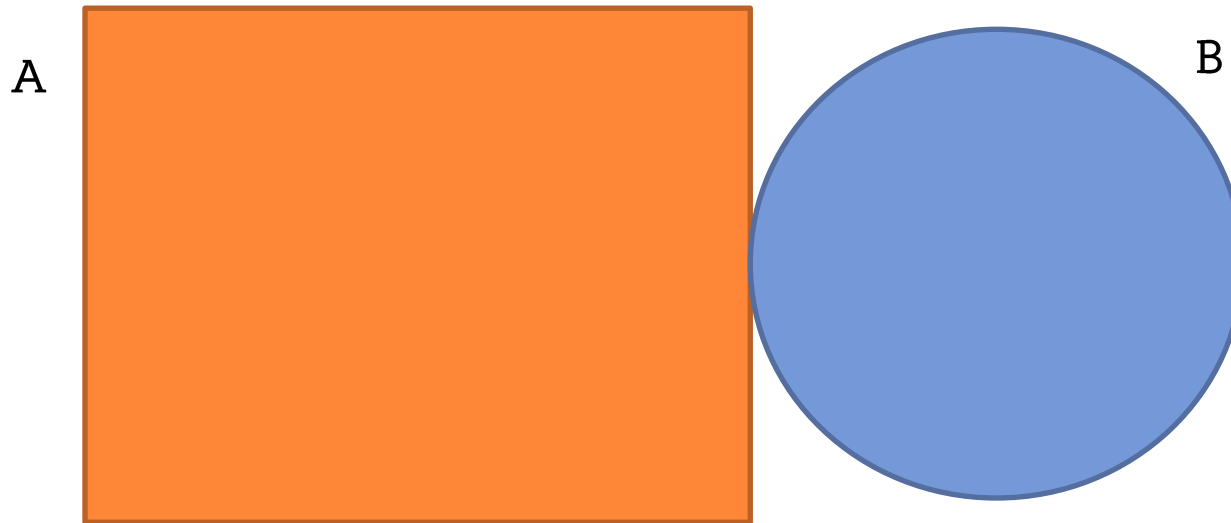
$$d(A,B)=0?$$

Nie może tak być! To nie będzie metryka!



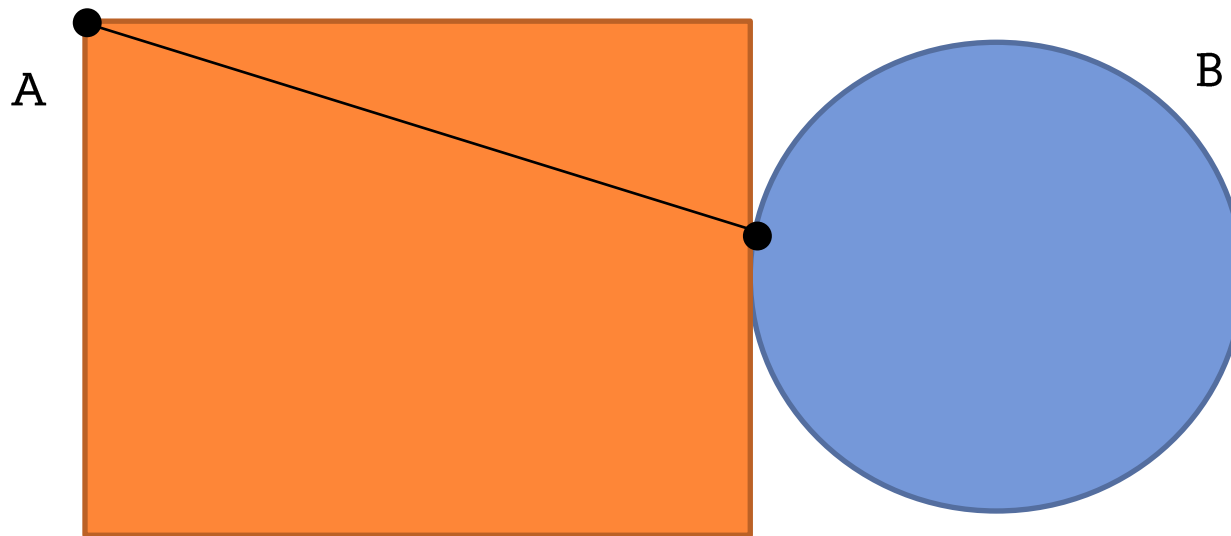
METRYKA HAUSDORFFA (KOTA I PSA)

- Umieszczamy w A kota, a w B psa. Co się stanie?



METRYKA HAUSDORFFA (KOTA I PSA)

- Umieszczamy w A kota, a w B psa. Co się stanie?

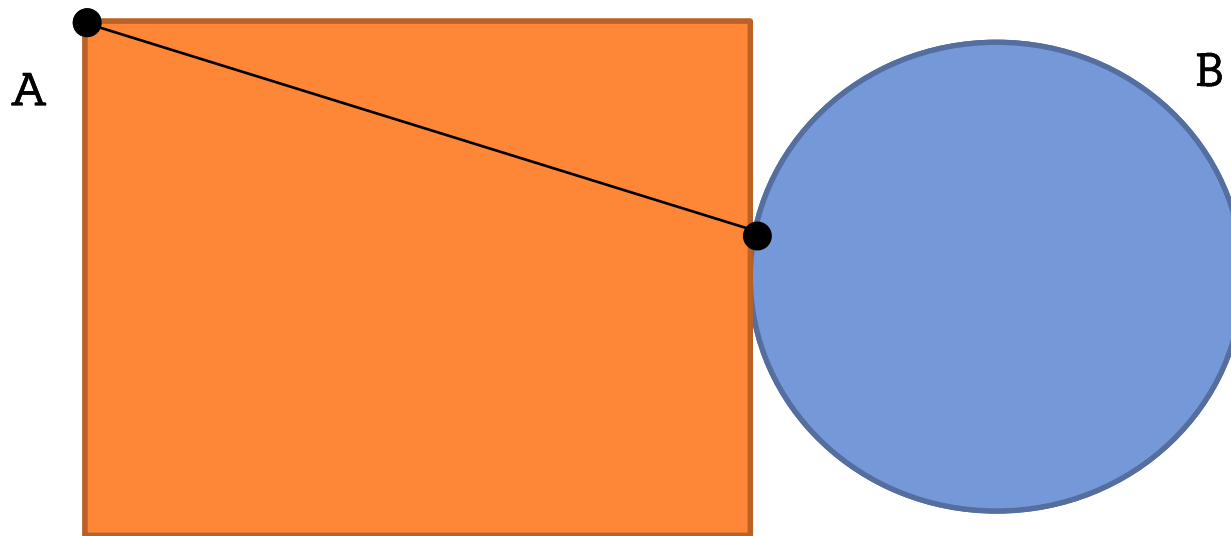


Zapamiętujemy tę odległość.



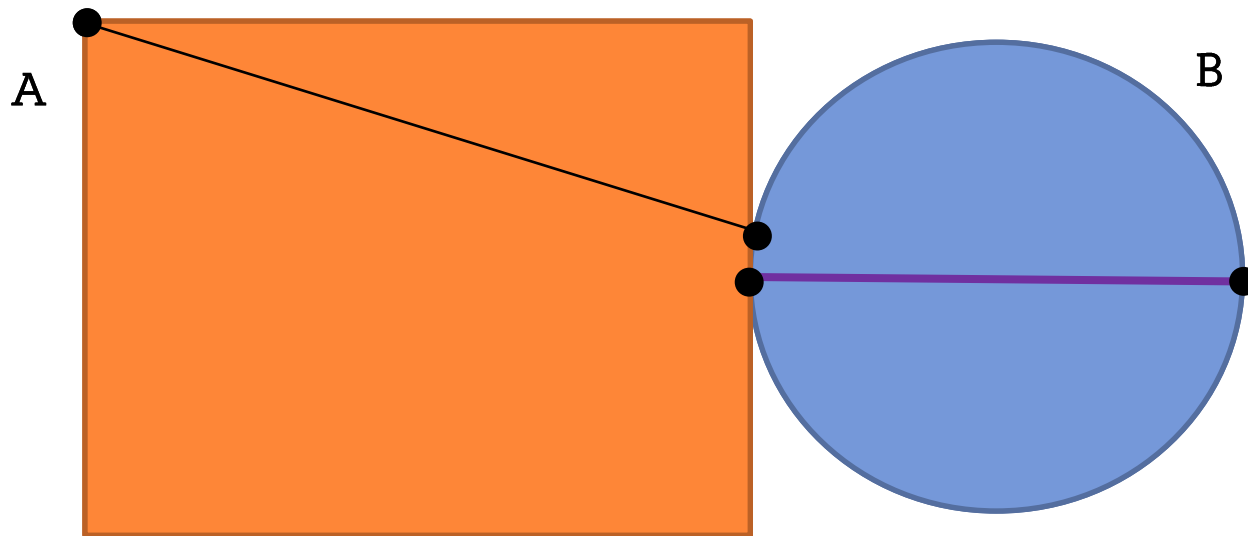
METRYKA HAUSDORFFA (KOTA I PSA)

- Teraz zamieniamy miejscami zwierzaki:
umieszczamy w A psa, a w B kota. Co się stanie?



METRYKA HAUSDORFFA (KOTA I PSA)

- Teraz zamieniamy miejscami zwierzaki:
umieszczamy w A psa, a w B kota. Co się stanie?



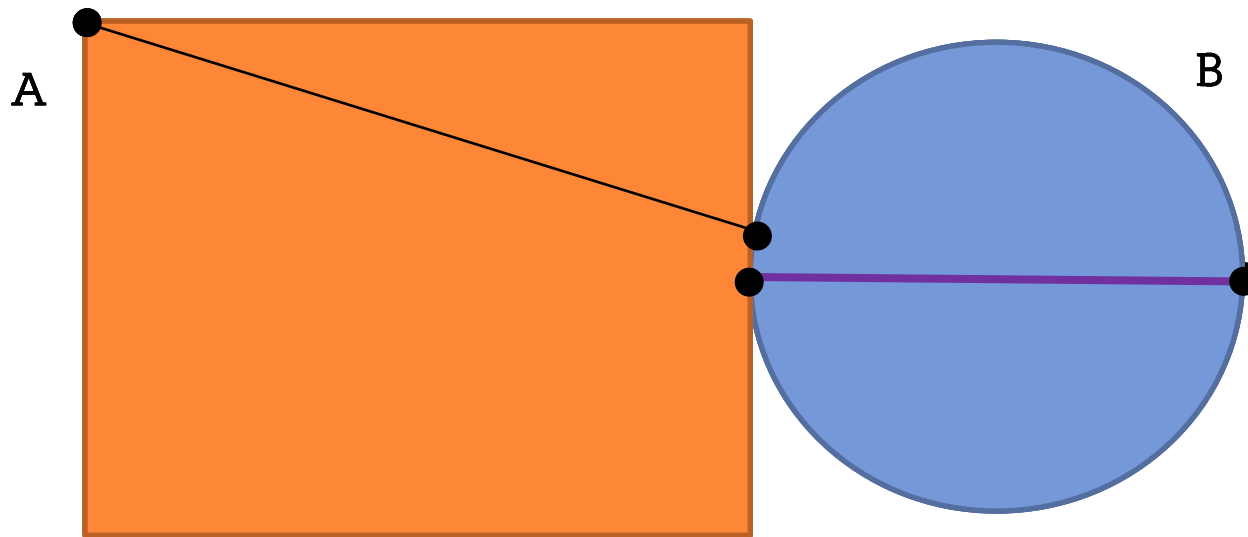
Teraz większa z tych długości odcinków jest odległością między tymi zbiorami.



METRYKA HAUSDORFFA (KOTA I PSA)

- Formalnie:

$$d_H(X, Y) = \max \{d_{XY}, d_{YX}\} = \max \left\{ \max_{x \in X} \min_{y \in Y} d(x, y), \max_{y \in Y} \min_{x \in X} d(x, y) \right\}$$



(zakładamy po cichu, że rozważamy ograniczone figury z brzegiem)



GDZIE TUTAJ FRAKTALE?



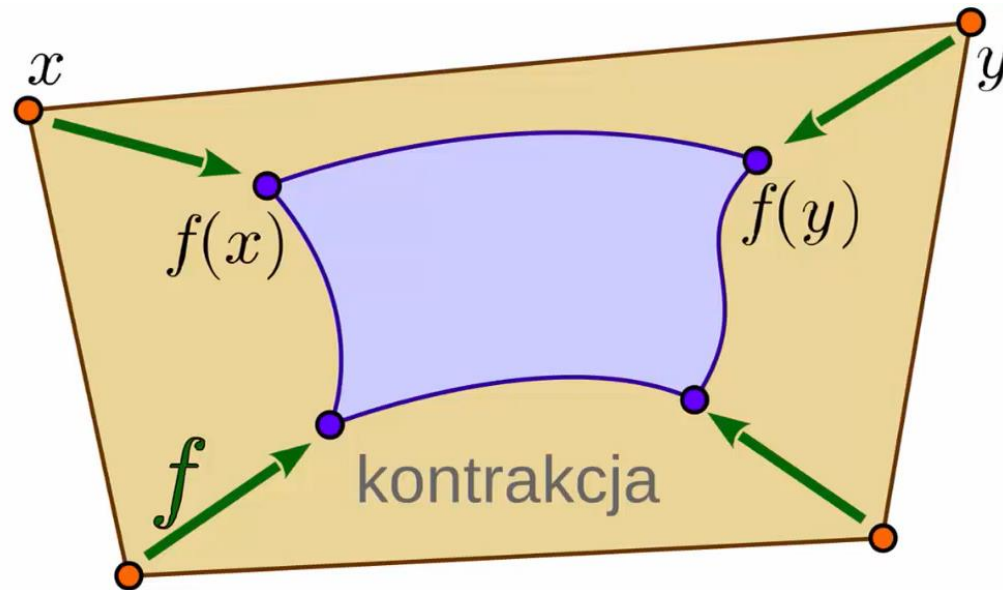
GDZIE TUTAJ FRAKTALE?

- Za chwilę.



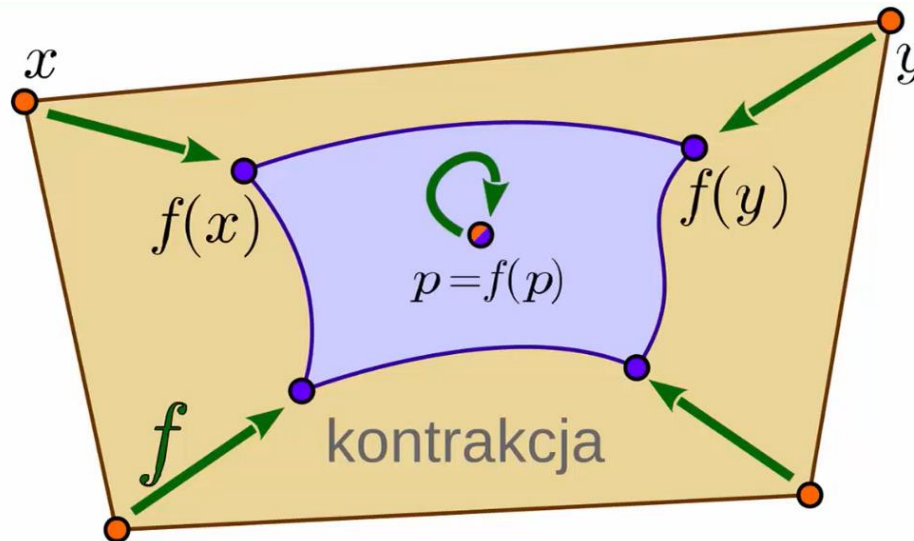
KONTRAKCJA (ODWZOROWANIE ZWĘŻAJĄCE)

- Funkcję f z jakiejś przestrzeni metryczną w nią samą nazywamy **kontrakcją**, gdy znacząco zmniejsza odległości.
 - Tzn. gdy istnieje taka stała $C < 1$, że zawsze zachodzi
$$d(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)$$



TWIERDZENIE BANACHA O KONTRAKCJI

- Jeśli rozważamy „ładną” przestrzeń metryczną i mamy na tej przestrzeni kontrakcję, to ta kontrakcja ma dokładnie jeden punkt stały (tzn. taki, że $f(p) = p$).



- Dodatkowo, iterując dowolny punkt x funkcją f , otrzymamy w granicy punkt stały.



Master P3770HD

HD TV

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

01:47

SERVO AF

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

3.2.1.1.2.3

SAMSUNG

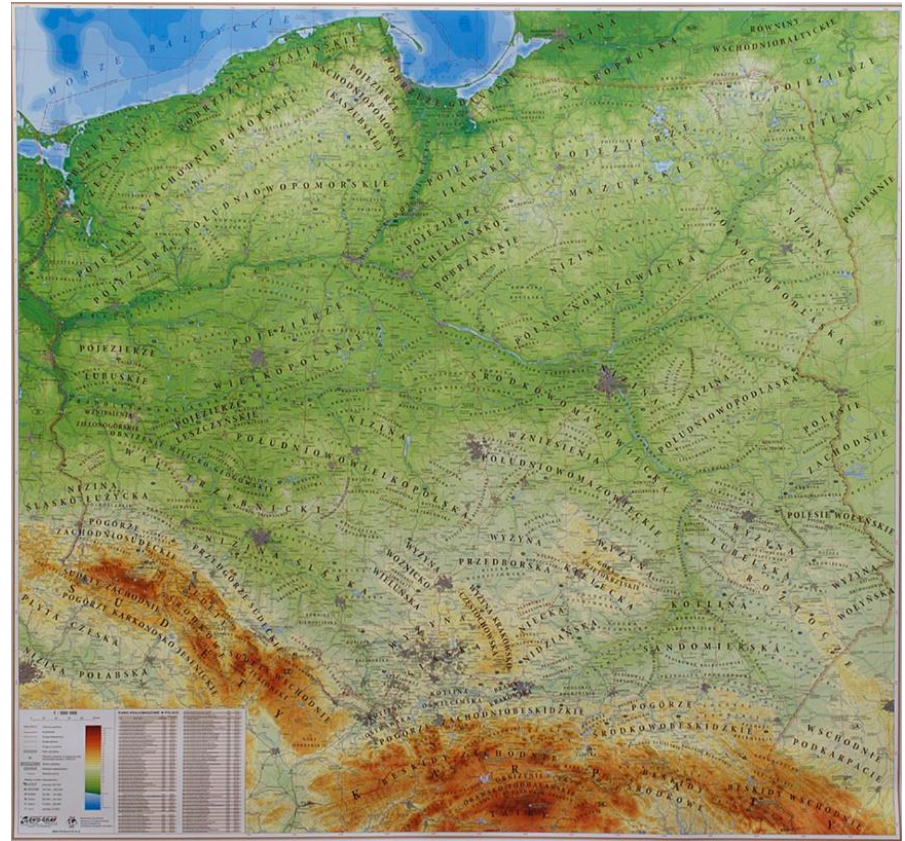


SERVO AF

100%

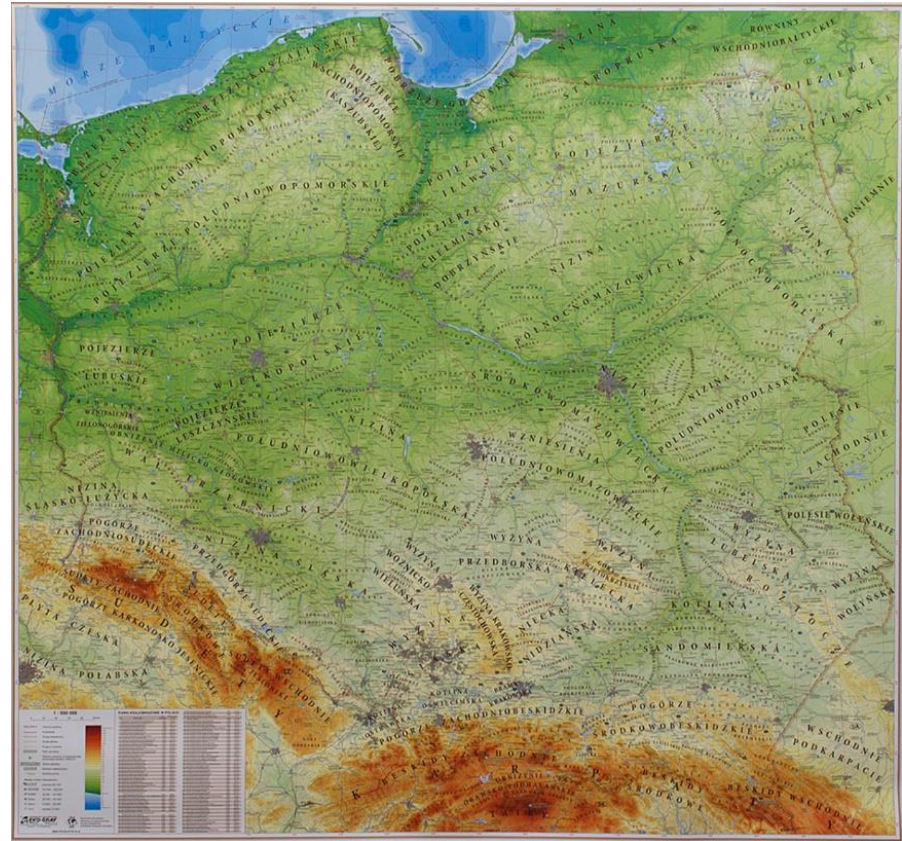


POŁÓŻMY MAPĘ POLSKI GDZIEŚ W POLSCE

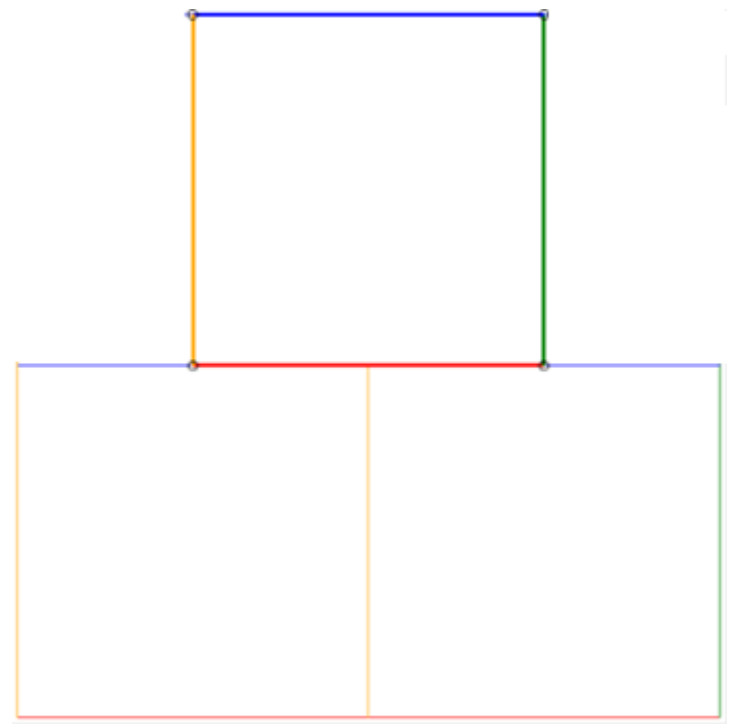
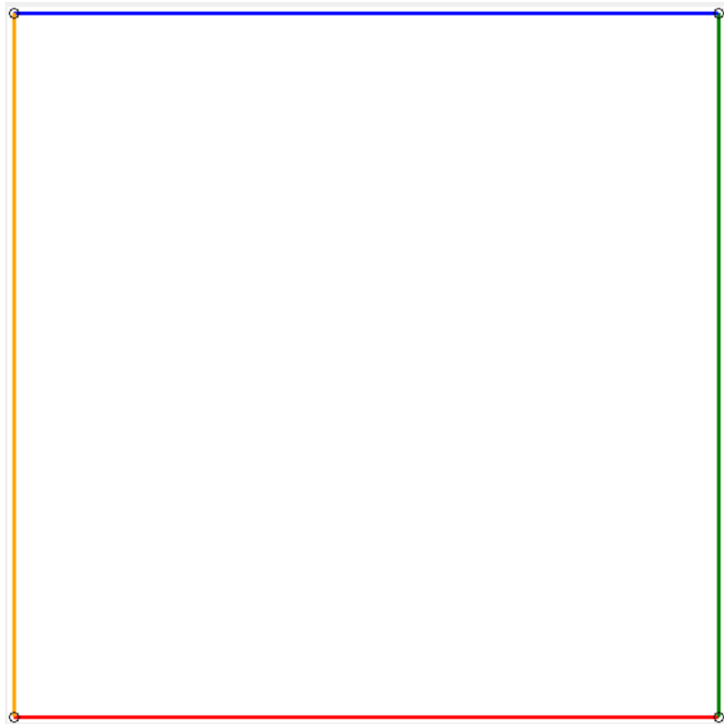


POŁOŻMY MAPĘ POLSKI GDZIEŚ W POLSCE

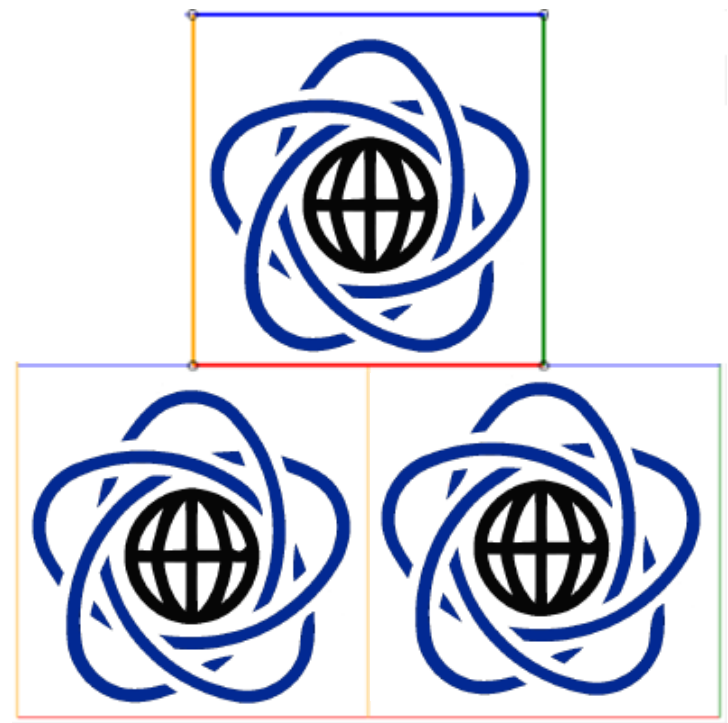
- Wtedy z tw. Banacha będzie istniał dokładnie jeden taki punkt na położonej mapie, który pokryje się z punktem w rzeczywistości!



WIELE KONTRAKCJI



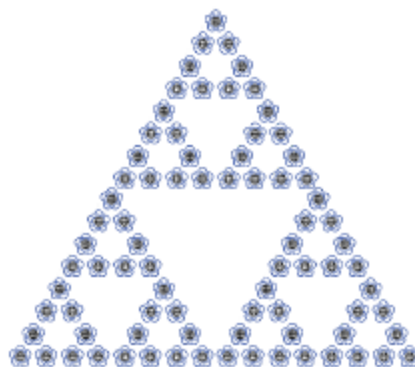
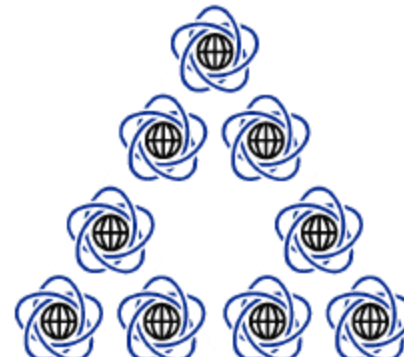
WIELE KONTRAKCJI

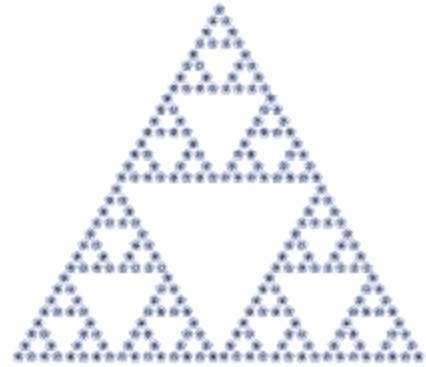
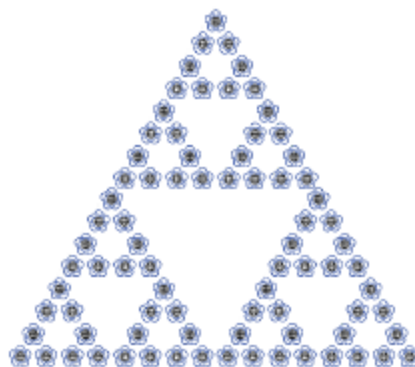
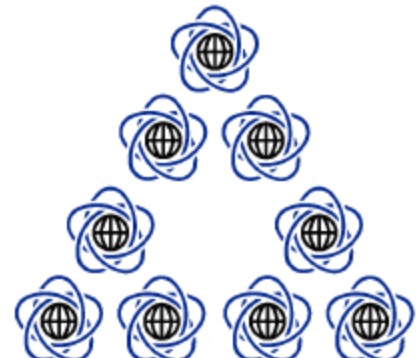


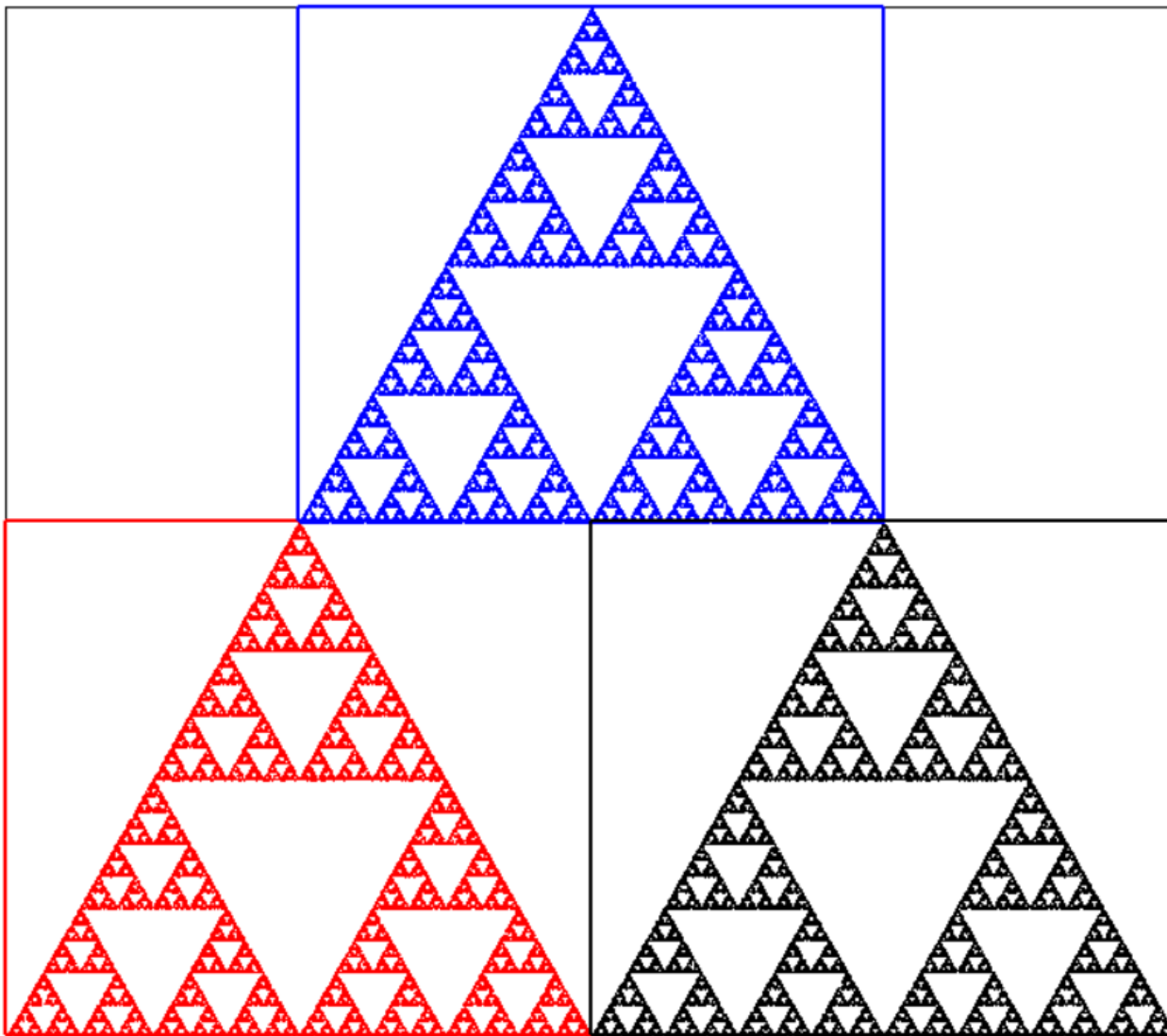












Zatem fraktale są punktami stałymi pewnych kontrakcji (zwanymi operatorami Hutchinsona) na przestrzeni metrycznej zbiorów domkniętych i ograniczonych z metryką Hausdorffa.





CZY KALAFIOR MOŻE SIĘ PRZYDAĆ W ELEKTRONICE?

ŁAGODNE ODERWANIE SIĘ OD CODZIENNOŚCI MATEMATYKI

dr inż. Michał Zwierzyński