

Zadanie 1. Michał ma przed sobą 10 różnych cukierków. Michał zastanawia się nad tym, ile by zjeść cukierków, może zjeść wszystkie, może zjeść kilka, może też być przypadek, że będzie się zastanawiał tak długo, że odechce mu się jeść.

Jak dużo Michał ma możliwości zjedzenia cukierków?

Zadanie 2. Na przyjęcie do Michała przyszło kilku jego znajomych. Michał zauważył, że każdy z każdym na przyjęciu przywitał się dokładnie raz uściśnięciem dłoni oraz tych uścisków było dokładnie 45. Ile osób było na przyjęciu?

Zadanie 3. Uzasadnić równość $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Zadanie 4. Uzasadnić równość $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Zadanie 5. Uzasadnić równość $k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$.

Zadanie 6. Uzasadnić równość $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

Zadanie 7. Uzasadnić równość $\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$.

Podpowiedź: Przekształcić do $\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2}{1}\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \binom{2}{2}\binom{2n}{n-1}$.

Zadanie 8. Uzasadnić równość $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

Zadanie 9. Uzasadnić równość $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$.

Zadanie 10. Uzasadnić równość $\binom{n}{h}\binom{n-h}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{h}$.

Zadanie 11. Uzasadnić równość $\binom{3n}{3} = n^3 + 6\binom{n}{2}\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3}$.

Zadanie 12. Załóżmy, że mamy dwa punkty $A(0,0)$ oraz $B(m,n)$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}_+$. Ile jest najkrótszych dróg między A i B , jeżeli możemy poruszać się po odcinkach jednostkowych równoległych do osi układu współrzędnych?

Zadanie 13. Uzasadnić równość $\binom{m+n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{m}{k}\binom{n}{n-k}$.

Zadanie 14. Uzasadnić równość $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Zadanie 15. Uzasadnić równość $\binom{m+n}{k} = \sum_{s=0}^k \binom{m}{s}\binom{n}{k-s}$.

Zadanie 16. Udowodnić zasadę pochłaniania: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Zadanie 17. Niech f_n będzie ciągiem Fibonacciego, zdefiniowanym następująco: $\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n > 1 \end{cases}$.

Uzasadnić równość $\sum_k \binom{n-k}{k} = f_n$.

Zadanie 18. Uzasadnić równość $m^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(m-1)^{n-k}$.

Zadanie 19. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m} 2^m$.

Zadanie 20. Uzasadnić równość $\binom{n}{f} \binom{n}{m} = \sum_{j=0}^f \binom{f}{f-j} \binom{m+j}{f} \binom{n}{m+j}$

Zadanie 21. Rozważmy równanie: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = m$, gdzie $x_1, x_2, \dots, x_k \geq 1$.
Udowodnić, że ilość rozwiązań tego równania jest równa $\binom{m-1}{k-1}$.

Zadanie 22. Rozważmy równanie: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$, gdzie $x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0$.
Udowodnić, że ilość rozwiązań tego równania jest równa $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Zadanie 23. Na przyjęcie do Michała przyszło 10 osób. Michał ma 100 takich samych czekoladek i chce każdej osobie na przyjęciu dać co najmniej 4 czekoladki. Ile ma on możliwości rozdzielenia cukierków wśród gości?

Zadanie 24. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Zadanie 25. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^n (n-k) \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Zadanie 26. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

Zadanie 27. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^n k(k-1)(k-2) \binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)2^{n-3}$.

Zadanie 28. Znaleźć wzór na $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

Zadanie 29. Znaleźć wzór na $\sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k}$.

Zadanie 30. Uzasadnić równość $1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2}$.

Zadanie 31. Uzasadnić równość $\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Podpowiedź: Dla $k = 1$ otrzymujemy poprzednie zadanie.

Zadanie 32. Uzasadnić równość $\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$.

Zadanie 33. Uzasadnić równość $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

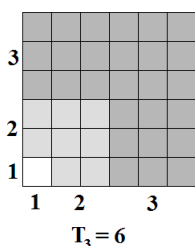
Zadanie 34. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1}$

Zadanie 35. Znaleźć wzór na $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2$.

Zadanie 36. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^n k^3 = \binom{n+1}{2}^2$.

Podpowiedź (jedno rozwiązanie): Rozważyć ile jest prostokątów na szachownicy $n \times n$ o bokach równoległych do boków szachownicy.

Podpowiedź (drugie rozwiązanie): Szachownicę o boku T_n ($T_n = 1 + 2 + \dots + n$) dzielimy na T_n^2 kwadratów jednostkowych, a następnie na n części, jak na poniższym rysunku.



Niech a_k - oznacza ilość kwadratów jednostkowych w k -tej części. Pokazać, że $\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n a_k = T_n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \binom{n+1}{2}^2$.

Zadanie 37. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$.

Zadanie 38. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.

Zadanie 39. Uzasadnić równość $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = 2^{n-k} \binom{n}{k}$.

Zadanie 40. Uzasadnić równość $\sum_{i=0}^n 5^{n-i} \binom{n}{i} = 6^n$.

Zadanie 41. Uzasadnić równość $\binom{n}{k}^2 = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{k+j}{k} \binom{n}{k+j}$.

Zadanie 42. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{m} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{2m+1}$.

Zadanie 43. Uzasadnić równość $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}$.

Zadanie 44. Uzasadnić równość $\binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \dots \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n} = n! \cdot \prod_{k=1}^n (2k-1)$.

Zadanie 45. Uzasadnić równość $\binom{2n}{n} n! = 2^n \prod_{i=1}^n (2i-1)$.

Podpowiedź: $2n$ dzieci ściga się w parach. Nauczyciel notuje wyniki: kto z kim się ściga i kto wygrał w danej parze. Nie są możliwe remisy.

Zadanie 46. Uzasadnić straszną równość z wykładu:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} k! \cdot \prod_{i=1}^{n-k} (2i-1) \right) + \binom{2n}{n} n! = 3^n \prod_{i=1}^n (2i-1)$$

Podpowiedź: Bardzo podobne do poprzedniego zadania, tylko możliwe są remisy (wyścigów bez remisów jest k).