Logarytmy

sobota, 6 grudnia 2025 14:00

$a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $b > 0$

$\log_a b = c \iff a^c = b$

$\log_3 27 = 3$

$\log_2 8 = 3$ bo $2^3 = 8$

$\log_4 16 = 2$

$\log_{10} 1000 = 3$

$\log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

Idea: $a^m = a^n$
$\Updownarrow$
$m = n$

Tzn. Fajnie byłoby mieć tę samą podstawę.

$\log_4 8 = x$, $4^x = 8^1$

$(2^2)^x = 2^3$

$2^{2x} = 2^3$

$2x = 3$, $x = \frac{3}{2}$

$\log_{27} 9 = x$ $27^x = 9$

$(3^3)^x = 3^2$

$3^{3x} = 3^2$, $3x = 2$, $x = 2/3$

$\sqrt[k]{a^m} = a^{\frac{m}{k}}$

$\log_{\sqrt{8}}(16) = x$ $\sqrt{8}^x = 16$

$\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^x = 16$

$8^{\frac{1}{2}x} = 16$

$(2^3)^{\frac{1}{2}x} = 2^4$, $2^{\frac{3}{2}x} = 2^4$

$\frac{3}{2}x = 4 \quad / \cdot \frac{2}{3}$

$\boxed{x = \frac{8}{3}}$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0$, $y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Uwaga:

$\cancel{\log_2 x^2 = 2\log_2 x}$ BARDZO ŹLE!

$x \neq 0$

$\log_2(x^2) = 2 \cdot \log_2|x|$ OK

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

Oblicz wartość: $\boxed{\log_4 36 - 2\log_4 3} = \log_4 36 - \log_4(3^2) =$

$= \log_4 4 = 1$

$\log_{17} 1 = 0$

$17^0 = 1$

$\boxed{\log_{\frac{2}{3}} 4 - 2\log_{\frac{2}{3}} 3} = \log_{\frac{2}{3}} 4 - \log_{\frac{2}{3}} 9 = \log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} = 2$ bo $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$3\log_5 10 - \log_5 8 = \log_5(1000) - \log_5 8 = \log_5 \frac{1000}{8} = \log_5 125 = 3$

$\boxed{\log_6 2 + \frac{1}{\log_3 6}} = \log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2\cdot 3) = \log_6 6 = 1$

$\boxed{\log_4 18 - \log_2 3} = \frac{\log_2 18}{\log_2 4} - \log_2 3 =$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

c

$= \frac{\log_2 18}{2} - \log_2 3 =$

$= \frac{1}{2}\cdot\log_2 18 - \log_2 3 = \log_2 \sqrt{18} - \log_2 3 =$

$= \log_2 \frac{\sqrt{18}}{3} = \log_2 \frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{3}} = \log_2 \sqrt{2} =$

$= \log_2\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

$\boxed{\log_4 7 \cdot \log_7 16} = \frac{\log_7 7}{\log_7 4}\cdot \log_7 16$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$$= \frac{1}{\log_7 4} \cdot \log_7 16 = \frac{\log_7 16}{\log_7 4} =$$

$$= \frac{\log_7 (4^2)}{\log_7 4} = \frac{2 \cancel{\log_7 4}}{\cancel{\log_7 4}} = 2$$

II $\log_4 7 \cdot \log_7 16 = \frac{\overbrace{\log_7 7}^{=1}}{\log_7 4} \cdot \log_7 16 =$

$$= \frac{\log_7 16}{\log_7 4} = \log_4 16 = 2$$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

III $\log_4 7 \cdot \log_7 16 = \cancel{\log_4 7} \cdot \frac{\log_4 16}{\cancel{\log_4 7}} =$

$$= \log_4 16 = 2$$

Kombinujemy: próbujemy mieć 'podobne' podstawy, korzystamy ze wzorów
Na kartce ze wzorami (czasami mechanicznie).

Jak chcemy dobrze przećwiczyć wzory na logarytmy, to szukajmy i rozwiązujmy takiego typu zadania:

Wiemy, że $\log_2 3 = a$ i $\log_2 5 = b$.
Wyznacz wartość poniższej liczby w zależności od $\boxed{a}$ i $\boxed{b}$.

(a) $\log_2 9 = \log_2 (3^2) = 2 \cdot \log_2 3 = 2a$

(b) $\log_2 100 = \log_2 10^2 = 2\log_2 10 =$

$= 2\log_2(2 \cdot 5) = 2(\log_2 2 + \log_2 5)$

(b) $\log_2 100 = \log_2 10^2 = 2\log_2 10 =$

$= 2\cdot\log_2(2\cdot 5) = 2(\log_2 2 + \log_2 5) =$

$= 2(1+b)$

(c) $\log_2(30) = \log_2(2\cdot 3\cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5 =$

$= 1 + a + b$

(d) $\log_2(24) = \log_2(2^3\cdot 3) = \log_2(2^3) + \log_2 3 = 3 + a$

(e) $\log_3 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 3} = \dfrac{2}{a}$

(f) $\log_5 10 = \dfrac{\log_2 10}{\log_2 5} = \dfrac{\log_2(2\cdot 5)}{b} = \dfrac{\log_2 2 + \log_2 5}{b} = \dfrac{1+b}{b}$

(g) $\log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3} = \dfrac{b}{a}$

(h) $\log_{15} 20 = \dfrac{\log_2 20}{\log_2 15} = \dfrac{\log_2 2\cdot 2\cdot 5}{\log_2 3\cdot 5} = \dfrac{\log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 3 + \log_2 5}$

$= \dfrac{1+1+b}{a+b} = \dfrac{2+b}{a+b}$

Udowodnij, że $(a\neq 1, a>0, c\neq 1, c>0, b>0, d>0)$

$$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$$

$$\log_a b \cdot \log_c d = \frac{\log_c b}{\log_c a} \cdot \frac{\log_a d}{\log_a c}$$

$\log_c a \cdot \log_a c = 1$

bo $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$

Koniec

Narysuj wykres:

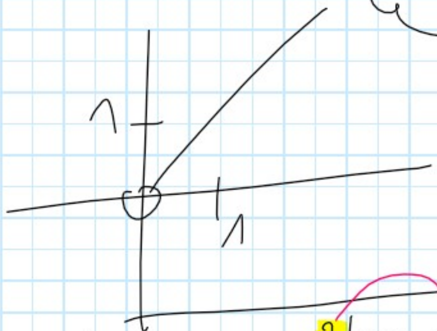
Narysuj wykres:

(a) $\boxed{f(x) = 2^{\log_2 x}}$

$D: \ x > 0$

$f(x) = x$

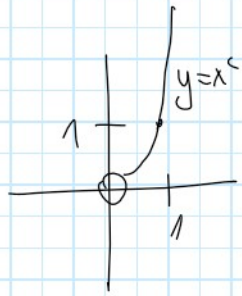
$a^{\log_a b} = b$



(b) $\boxed{f(x) = 2^{2\log_2 x}}$

$x > 0$

$f(x) = 2^{\log_2(x^2)} = x^2$



(c) $\boxed{f(x) = 4^{\log_2 x}}$

$x > 0$

$f(x) = (2^2)^{\log_2 x} = 2^{2\log_2 x} =$

$= 2^{\log_2(x^2)} = x^2$

lub ze wzoru na zamianę podstaw logarytmu