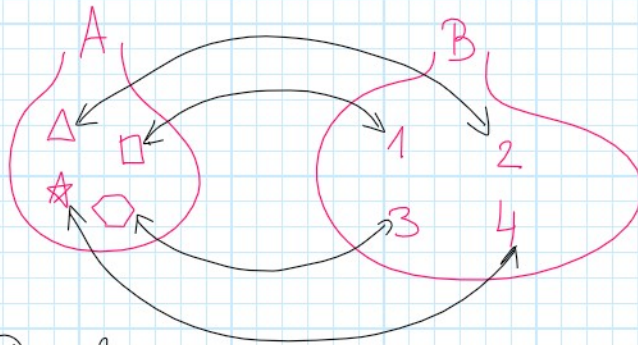


O nieskończonościach

sobota, 6 grudnia 2025



Dwa zbiory mają tyle elementów, gdy możemy elementy tych zbiorów porównać.
(ta definicja dopuszcza również zbiory nieskończone)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

$$\mathbb{K} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots\}$$

(kwadraty liczby $\mathbb{N}$)

Który zbiór, $\mathbb{N}$ czy $\mathbb{K}$, jest większy / ma więcej elementów?

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

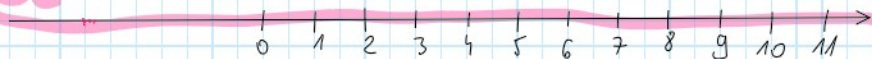
$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbb{Z}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & 4 \end{array}$$

te dwa zbiory są wymierne

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych (ułamki $\frac{p}{q}$, p, q - całkowite $q \neq 0$)

$$\left\{ -\frac{7}{8}, -\frac{2}{111}, 0, 7, -\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{117}{2}, \dots \right\}$$

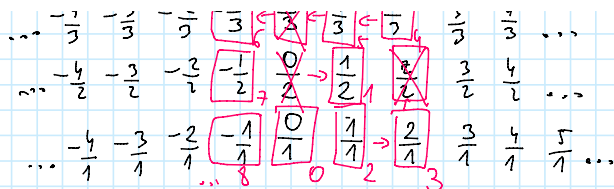


Okazuje się jednak, że $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{Q}|$

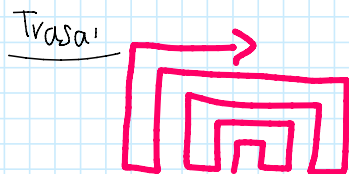
Próbowanie:

tu są wszystkie $\mathbb{Q}$

$\dots$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\dots$
$\dots$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\dots$
$\dots$	$-\frac{4}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\dots$



Będziemy szli po tej szachownicy; i kolejne NOWE liczby wymierne, do tej pory niespotkane, będziemy numerować kolejnymi liczbami naturalnymi (czerwono).

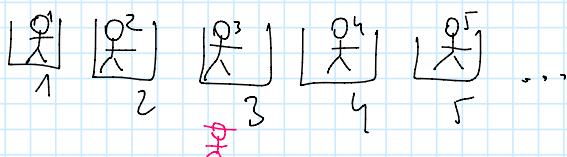


Idąc po trasie, każda liczba wymierna zostanie napotkana, czyli będzie ona miała przypisany jakiś numer, tzn. każda liczba wymierna będzie sparowana z dokładnie jedną liczbą naturalną. Oznacza to, że te dwa zbiory są RÓWNOLICZNE, tzn. mają taką samą liczbę elementów.

Okazuje się, że nie wszystkie nieskończone zbiory mają tyle samo elementów, np.. Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb RZECZYWISTYCH już nie są równoliczne. Zbiór liczb rzeczywistych ma więcej elementów niż zbiór liczb naturalnych, tzn. nie możemy poparować elementów tych zbiorów.

HOTEL HILBERTA

Mamy hotel w którym jest nieskończenie wiele pokoi, które to pokoje są ponumerowane liczbami naturalnymi dodatnimi:



(A) Hotel jest pełny. Przyjeżdża do niego nowy gość. Czy zmieścimy go w jakiś sposób w hotelu?

Można każdego gościa wyprowadzić na chwilę na korytarz, i powiedzieć, że gość jak był wcześniej w pokoju o numerze "N", to idzie do pokoju o numerze "N+1".



(B) Do hotelu przyjeżdża autobus z nieskończoną liczbą nowych gości, każdy nowy gość siedzi w autobusie na miejscu o numerze będącym liczbą naturalną:



Czy uda się zakwaterować wszystkie osoby z tego autobusu do pełnego już hotelu?

TAK, bo możemy wszystkich gości z hotelu znów na chwilę wyprowadzić na korytarz:



I teraz umieszczamy po kolei gości do pokoi w następujący sposób: najpierw idzie do pokoju gość, który już był w hotelu (o jak najmniejszym możliwym numerze), a potem idzie do kolejnego pokoju gość z autobusu (o jak najmniejszym numerze).

Trochę inaczej: gość, który był w pokoju o numerze "N" idzie do pokoju o numerze "2N-1", tzn. goście z hotelu zajmują kolejne pokoje 'nieparzyste'; a gość z autobusu na miejscu "N" idzie do pokoju o numerze "2N".

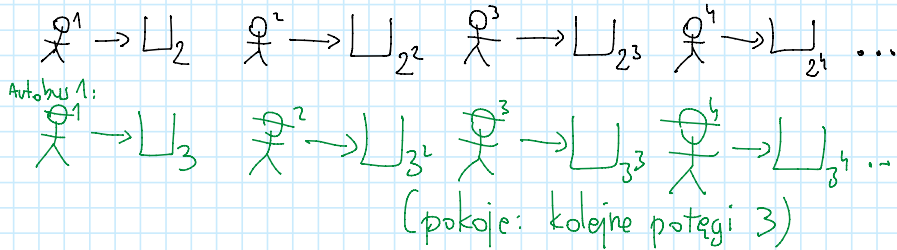
© A co jak przyjedzie nieskończenie wiele takich autobusów (numery tych autobusów są też liczbami naturalnymi)?

Na początek na chwilę osoby z pokoi wychodzą na korytarz.

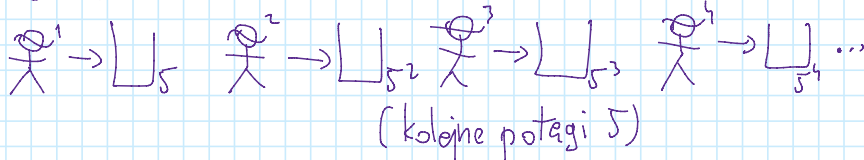
1. żeby pierwsze to

naturalny:

Na początek na chwilę osoby z pokoi wychodzą na korytarz.



Autobus 2:



licby pierwsze to takie, które mają dokładnie dwa dzielniki (tzn.

2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Liczby pierwszych jest ∞ wiele (to twierdzenie Euklidesa)

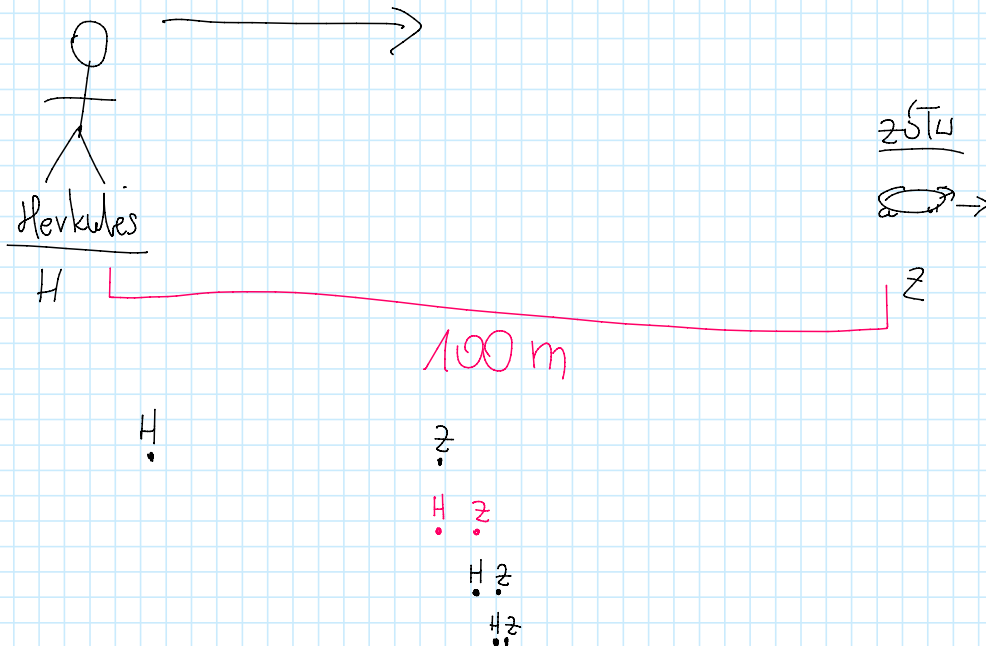
Z kolejnych autobusów kolejni pasażerowie będą wypełniać kolejne potęgi kolejnych liczb pierwszych. Jest to możliwe, bo właśnie liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Po zakwaterowaniu puste pokoje: 1, 6, 10, 12, 14, 15, 18, ...

(puste pokoje to będą pokoje, które mają co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze (plus pokój o numerze 1))

Zatem po tej akcji kwaterowania pozostaje nam nieskończenie wiele pustych pokoi.

Takie podejście do nieskończoności wymyślił G. Cantor w XIX/XX wieku. I ciekawostka: dużo znanych matematyków mówiło, że to jest niedorzeczne. Jednak na przestrzeni lat podejście Cantora okazało się bardzo przydatne i dzisiejsza matematyka i np. fizyka teoretyczna bardzo korzystają z takiego podejścia.



Gdy Herkules biegnie i znajdzie się w poprzednim miejscu, gdzie był żółw, to żółw przeszedł kawałek dalej. Następnie to rozumowanie powtarzamy w kółko, i można dojść do (błédnego, ale trochę logicznego) wniosku, że Hercules nigdy nie dogoni żółwia.

Podobny problem jest ze strzałą, tzn. wystrzelona strzala nigdy nie doleci do celu. Będzie tak, bo strzala znajdzie się najpierw w połowie drogi i wtedy możemy rozumować, że z tej połowy strzelamy strzałą. Potem ta strzala znajdzie się w połowie połowy odległości, potem w połowie połowy

Oba te ciągi wnioskować polegają na tym, że paradoksalnym jest to, że suma nieskończenie wielu dodatnich liczb może być skończona!

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

↑
pole kwadratu

~~$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = G \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 |Q_n - G| < \varepsilon$$~~
~~def. granicy uogdy~~
~~XVI/XVII m~~