**MATEMATYKA DLA AMBITNYCH**
**NIERÓWNOŚĆ JENSENA I NIERÓWNOŚCI GEOMETRYCZNE**
**RAFAŁ GÓRAK**
**10 KWIETNIA 2018**

**Zadanie 1.** *Udowodnij, że ze wszystkich trójkątów wpisanych w trójkąt ostrokątny ABC, najmniejszy obwód ma trójkąt, którego wierzchołki są spodkami wysokości trójkąta ABC.*

**Zadanie 2.** *Pokazać, że dowolny sześciokątny przekrój sześcianu jednostkowego ma obwód większy niż* $3\sqrt{2}$.

**Zadanie 3.** *Pokazać, że w dowolnym wielokącie są takie dwa boki, że* $1 \leq \frac{b}{a} < 2$.

**Zadanie 4.** *Pokazać, że jeśli wielokąt wypukły zawiera się w innym wielokącie, to obwód wewnętrznego wielokąta jest mniejszy niż zewnętrznego.*

**Zadanie 5.** *Pokaż, że równoległobok wpisany w trójkąt ABC ma pole nie większe, niż połowa pola trójkąta ABC.*

**Zadanie 6.** *Pokazać, że jeśli suma kątów przy wierzchołku piramidy jest większa niż 180 stopni, to każda krawędź boczna jest mniejsza od połowy obwodu podstawy (podstawa jest wielokątem wypukłym).*

**Zadanie 7.** *Udowodnij, że jeżeli* $a, b, c, d$ *to boki czworokąta wypukłego zawartego w kwadracie jednostkowym, to* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} > 4$.

**Zadanie 8.** *W trapezie* $ABCD$ $(BC||AD)$ *przekątne przecinają się w punkcie* $O$. *Pokaż, że zachodzi nierówność między polami* $S_{OCD} \leq \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

**Zadanie 9.** *W czworokącie* $ABCD$ *przekątne przecinają się w punkcie* $O$. *Pokaże, że* $\sqrt{S_{AOB}} + \sqrt{S_{COD}} \leq \sqrt{S_{ABCD}}$.

**Zadanie 10.** *Niech* $\alpha, \beta, \gamma$ *będą kątami w trójkącie.*

(i) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sqrt{3}$
(ii) $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma} \geq 2\sqrt{3}$
(iii) $1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$
(iv) $ctg\alpha \cdot\ ctg\beta \cdot\ ctg\gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$
(v) $ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma \geq \sqrt{3}$
(vi) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leq \frac{9}{4}$
(vii) $ctg^2\alpha + ctg^2\beta + ctg^2\gamma \geq 1$

**Zadanie 11.** *Pokaż, że spośród wszystkich czworokątów wpisanych w okrąg, kwadrat ma największy obwód.*

**Zadanie 12.** *Pokaż, że jeśli* $a, b, c, d$ *to boki w czworokącie wpisanym w okrąg o promieniu* $R$, *to* $abcd \leq 4R^4$.

**Zadanie 13.** *Pokaż, że spośród wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg, trójkąt równoboczny ma największe pole i obwód.*

**Zadanie 14.** *Udowodnij, że jeżeli trójkąt nie jest rozwartokątny, to jego obwód jest większy od podwojonej średnicy okręgu opisanego.*