Matematyka dla ambitnych - Potęga punktu względem okręgu

Krzysztof Chełmiński

Warszawa, 30.01.2018

Definicja *Na płaszczyźnie dany jest okrąg ω o środku O i promieniu $r > 0$ oraz punkt P. Potęgą punktu P względem ω nazywamy liczbę*

$$\mathrm{pot}\,(P, \omega) = PO^2 - r^2\,.$$

Twierdzenie 1 (o siecznych) *Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg ω w punktach A i B. Wtedy wartość iloczynu $PA \cdot PB$ jest równa $|\mathrm{pot}\,(P, \omega)|$.*

Dowód Niech P leży na zewnątrz ω. Narysujmy inną prostą przechodzącą przez P i przecinającą ω w punktach C i D. Wówczas

$$\Delta PDA \sim \Delta PBC \quad \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD\,.$$

Niech teraz druga prosta przechodzącą przez P będzie styczna do ω w E. Wtedy

$$\Delta PEA \sim \Delta PBE \quad \Rightarrow PA \cdot PB = PE^2 = \mathrm{pot}\,(P, \omega)\,.$$

Dowód gdy P jest punktem wewnętrznym jest bardzo podobny.

Twierdzenie 2 (odwrotne do tw. o siecznych) *a) Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie P. Jeżeli $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ to punkty $A\,, B\,, C$ i D leżą na jednym okręgu.*

b) Punkty $P\,, A\,, B$ leżą w tej kolejności na prostej. Ponadto punkty $P\,, C\,, D$ leżą w tej kolejności na innej prostej. Jeżeli $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ to punkty $A\,, B\,, C$ i D leżą na jednym okręgu.

c) Punkty $P\,, A\,, B$ leżą w tej kolejności na prostej k. Punkt E nie należy do k oraz $PA \cdot PB = PE^2$. Wtedy okrąg opisany na punktach $A\,, B\,, E$ jest styczny do k w E.

Dowód a) Niech okrąg ω opisany na ΔABC przecina prostą CP w punkcie D' (innym niż C). Chcemy aby $D = D'$.

$$-\mathrm{pot}\,(P, \omega) = PC \cdot PD' = PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad \Rightarrow PD' = PD\,.$$

Punkty D i D' leżą po tej samej stronie P więc $D = D'$.

b) dowód jest identyczny, c) odwrócenie rozumowania z twierdzenia 1.

Twierdzenie 3 (o prostej potęgowej) *Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi ω_1 o środku O_1 i promieniu $r_1 > 0$ oraz ω_2 o środku O_2 i promieniu $r_2 > 0$. Niech $O_1 \neq O_2$. Wtedy zbiór punktów P takich, że*

$$\mathrm{pot}\,(P, \omega_1) = \mathrm{pot}\,(P, \omega_2)$$

jest prostą prostopadłą do prostej O_1O_2.

Dowód Niech P będzie punktem takim, że $\mathrm{pot}\,(P, \omega_1) = \mathrm{pot}\,(P, \omega_2)$. Oznaczmy przez $\tilde{P}$ rzut prostokątny P na prostą O_1O_2. Wtedy

$$\mathrm{pot}\,(\tilde{P}, \omega_1) = \tilde{P}O_1^2 - r_1^2 = PO_1^2 - P\tilde{P}^2 - r_1^2 = PO_2^2 - P\tilde{P}^2 - r_2^2 = \tilde{P}O_2^2 - r_2^2 = \mathrm{pot}\,(\tilde{P}, \omega_2)\,.$$

Nietrudno sprawdzić, że na prostej O_1O_2 jest tylko jeden punkt o powyższej własności.

Niech teraz k będzie prostą prostopadłą do prostej O_1O_2 przechodzącą przez P oraz niech $Q \in k$. Wtedy rzut prostokątny Q na O_1O_2 to $\tilde{P}$. Więc

$$\mathrm{pot}\,(Q,\omega_1) = QO_1^2 - r_1^2 = Q\tilde{P}^2 + \tilde{P}O_1^2 - r_1^2 = Q\tilde{P}^2 + \tilde{P}O_2^2 - r_2^2 = QO_2^2 - r_2^2 = \mathrm{pot}\,(Q,\omega_2)\,.$$

Jeżeli $R \notin k$ to rzut R na O_1O_2 jest inny niż $\tilde{P}$ i dlatego $\mathrm{pot}\,(R,\omega_1) \neq \mathrm{pot}\,(R,\omega_2)$.

Uwaga Opisana w twierdzeniu 3 prosta nazywa się prostą potęgową lub osią potęgową ω_1 i ω_2.

Twierdzenie 4 (o trzech prostych potęgowych)

Na płaszczyźnie dane są trzy okręgi o różnych środkach. Wtedy trzy osie potęgowe trzech możliwych par okręgów albo przecinają się w jednym punkcie albo są równoległe.

Zadanie 1 Dany jest okrąg ω i punkty A, B, C leżące na nim. Prosta styczna do ω w punkcie C przecina prostą AB w punkcie Q. Proste styczne do ω w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Wykaż, że $PQ^2 = PB^2 + QC^2$.

Zadanie 2 Dany jest trójkąt ABC. Na boku AC znajdź taki punkt S aby $AS \cdot CS = BS^2$.

Zadanie 3 Na płaszczyźnie dany jest okrąg ω i dwa różne punkty A, B leżące wewnątrz tego okręgu. Znajdź okrąg styczny wewnętrznie do ω przechodzący przez A i B.

Zadanie 4 Czworokąt $ABCD$, w którym prosta AB nie jest równoległa do prostej CD, jest wpisany w okrąg. M jest środkiem boku CD oraz P jest takim punktem wewnętrznym czworokąta $ABCD$, że $AP = BP = CM$. Wykaż, że proste AB, CD i symetralna odcinka PM przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 5 Punkty $A\,, B\,, D\,, C$ leżą w tej kolejności na okręgu ω. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P oraz proste AD i BC przecinają się w punkcie Q. Wykaż, że wtedy $\mathrm{pot}\,(P,\omega) + \mathrm{pot}\,(Q,\omega) = PQ^2$ ..

Zadanie 6 Z punktu S leżącego na zewnątrz okręgu ω poprowadzono styczne SK i SL do ω w punktach K i L. Przez S poprowadzono dwie sieczne przecinające ω w punktach $A\,, C$ oraz $B\,, D$. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P oraz proste AD i BC w punkcie R. Wtedy punkty $K\,, L\,, P\,, R$ leżą na jednej prostej.

Zadanie 7 Okrąg ω jest styczny do prostej k w punkcie D. Cięciwa AB jest równoległa do prostej k. Na prostej k wybrano punkt C. Proste AC i BC przecinają okrąg ω w punktach E i F. Wykaż, że prosta EF przechodzi przez środek odcinka CD.

Zadanie 8 Oznaczmy w trójkącie prostokątnym ABC przez C_0 spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego $\angle C$. Wybrano punkt X z wnętrza odcinka CC_0 i niech K, L będą takimi punktami wybranymi odpowiednio z odcinków AX i BX, że $BK = BC$ i $AL = AC$. Oznaczmy przez M punkt przecięcia peostych AL i BK. Wykaż, że $MK = ML$.

Zadanie 9 Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, którego ortocentrum (punkt przecięcia się wysokości) oznaczono przez H. Niech W będzie dowolnym punktem wewnętrznym boku BC. Oznaczmy przez M i N spodki wysokości trójkąta ABC poprowadzonych z wierzchołków B i C. Niech ω_1 będzie okręgiem opisanym na trójkącie BWN oraz X niech będzie obrazem W w symetrii środkowej względem środka okręgu ω_1. Niech ω_2 będzie okręgiem opisanym na trójkącie CWM oraz Y niech będzie obrazem W w symetrii środkowej względem środka okręgu ω_2. Wykaż, że punkty $X\,, Y$ i H są współliniowe.

Zadanie 10 W trójkącie ostrokątnym ABC spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka C oznaczono przez D. Niech E będzie dowolnym punktem z odcinka CD oraz P, Q, R i S niech będą rzutami prostokątnymi punktu D na proste AC, AE, BE i BC. Wykaż, że punkty P, Q, R i S leżą na jednym okręgu lub na jednej prostej.