Matematyka dla ambitnych - Okręgi i styczne

Krzysztof Chełmiński

Warszawa, 6.02.2018

Twierdzenie 1 (NTG)

Odcinki styczne poprowadzone do danego okręgu z ustalonego punktu są równej długości.

Dowód Twierdzenie Pitagorasa lub symetria osiowa.

Zadanie 1
Do trójkąta ABC dorysowano okrąg dopisany do boku BC. Oznaczmy punkt styczności tego okręgu z bokiem BC przez D. Wykaż, że Punty A i D połowią obwód trójkąta ABC.

Zadanie 2
We wnętrzu kąta wypukłego dany jest punkt P. Poprowadź przez P taką prostą przecinającą ramiona kąta aby odcięty przez tą prostą trójkąt miał zadany obwód.

Zadanie 3
W trójkąt ABC wpisano okrąg i dopisano okrąg styczny do boku BC. Punkt styczności okręgu wpisanego z BC oznaczono przez X a punkt styczności okręgu dopisanego z BC przez A'. Wtedy $BX = A'C = p - AC$ gdzie p jest połową obwodu trójkąta ABC.

Twierdzenie 2 (o kącie między styczną a cięciwą)

Niech AB będzie cięciwą w danym okręgu oraz niech prosta l będzie styczną do tego okręgu w punkcie A poprowadzoną z punktu P. Wtedy kąt $\angle PAB$ jest równy kątowi wpisanemu w okrąg i opartemu na łuku wyznaczonym przez cięciwę AB.

Dowód Wybierzmy taki kąt wpisany oparty na łuku wyznaczonym przez cięciwę AB, w którym ramie AC jest średnicą okręgu. Wtedy z równości $\angle PAB + \angle BAC = 90° = \angle BAC + \angle ACB$ wynika teza.

Zadanie 4
Dwa okręgi ω_1 i ω_2 przecinają się w punktach P i Q. Z punktu A okręgu ω_1 poprowadzono proste AP i AQ, które przecięły ω_2 w punktach B i C. Wykaż, że styczna do ω_1 w punkcie A jest równoległa do prostej BC.

Zadanie 5
Z punktu A leżącego poza okręgiem ω poprowadzono styczne do tego okręgu w punktach B i C. Wykaż, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC i środek okręgu dopisanego do tego trójkąta styczny do boku BC leżą na ω.

Zadanie 6
W trójkącie ABC punkty E i F są spodkami wysokości opuszczonymi z wierzchołków B i C. Wykaż, że styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie A jest równoległa do prostej EF.

Twierdzenie 3 (o trójliściu)

Niech ABC będzie trójkątem, w którym dwusieczna kąta $\angle ABC$ przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wtedy $AD = DC = DI$.

Dowód Równość $AD = DC$ wynika z równości odpowiednich łuków. Wykażemy, że trójkąt AID jest równoramienny.

$$\angle DIA = \angle IAB + \angle ABI = \angle CAD + \angle IAC = \angle IAD\,.$$

Stąd $DA = DI$.

Zadanie 7(wzór Eulera)
Okrąg opisany na trójkącie ABC ma środek w punkcie O i promień R. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma środek w punkcie I i promień r. Zachodzi następująca równość $OI^2 = R(R-2r)$.

Zadanie 8 Wykaż, że okrąg ω przechodzący przez wierzchołki B i C trójkąta ABC oraz przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC wycina na bokach AB i AC cięciwy równej długości.

Zadanie 9 Trzy okręgi o środkach w punktach A, B i C są parami styczne zewnętrznie i posiadają wspólną styczną zewnętrzną. Niech okrąg o środku w C będzie najmniejszym okręgiem. Oznaczmy długości promieni okręgów o środkach w punktach A, B i C przez a, b i c. Wykaż, że $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$.

Zadanie 10 Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 i o różnych promieniach są rozłączne zewnętrznie. Wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów przecina wspólną styczną wewnętrzną w punkcie A. Wykaż, że kąt $\angle O_1AO_2$ jest prosty.

Zadanie 11 Okręgi ω_1 i ω_2 o środkach w punktach O_1 i O_2 i o promieniach długości R i r są rozłączne zewnętrznie. Wspólna styczna wewnętrzna l do tych okręgów przecina wspólne styczne zewnętrzne w punktach A i B. Oznaczmy punkt styczności l z jednym z okręgów przez C. Wykaż, że $AC \cdot CB = rR$.