

Zadania z teorii grafów - część pierwsza

Zadanie 1. Pokazać, że w grupie złożonej z n osób, gdzie $n \geq 2$, istnieją co najmniej dwie osoby które mają w tej grupie taką samą liczbę znajomych (zakładamy tutaj, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A).

Zadanie 2. W pewnym kraju jest $n \geq 2$ lotnisk L_1, L_2, \dots, L_n i połączenia lotnicze między nimi obsługiwane są przez firmy X i Y , przy czym istnieje bezpośrednie połączenie lotnicze w obie strony między dowolną parą lotnisk L_i, L_j i jest ono obsługiwane przez dokładnie jedną firmę.

a) Dla danego lotniska $L_i, i \leq n$, rozważamy zbiór B wszystkich lotnisk ze zbioru $A = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ do których można dolecieć odbywając całą podróż samolotami firmy X (być może z przesiadkami na innych krajowych lotniskach). Pokazać, że dla dowolnej pary L_i, L_j takiej, że $L_i \in B, L_j \in A \setminus B$ połączenie między lotniskami L_i i L_j obsługiwane jest przez firmę Y

b) Pokazać, że można wybrać jedną spośród firm X i Y w taki sposób, aby z dowolnego lotniska L_i na dowolne inne lotnisko $L_j, i, j \leq n$, można było dostać się odbywając całą podróż samolotami tej wybranej firmy (być może z przesiadkami na innych krajowych lotniskach).

Zadanie 3. W pewnej firmie jest n komputerów które są połączone kablami w ten sposób, że każda para komputerów połączona jest dokładnie jednym kablem, przy czym dane z komputera na komputer można przesyłać wyłącznie za pomocą tych kabli. Pokazać, że jeśli pracownicy firmy usuną dowolne $n - 2$ spośród tych kabli, to w dalszym ciągu będą mieli możliwość przesyłania danych między dowolną parą komputerów (być może za pośrednictwem pozostałych komputerów).