MiNI Akademia Matematyki na Politechnice Warszawskiej

Krzysztof Chełmiński

Niestandardowe rozwiązania zadań geometrycznych

MiNI PW, 15.01.2011

Twierdzenie Ptolemeusza

W dowolnym czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków:

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \,.$$

Nierówność Ptolemeusza

Jeżeli na czworokącie $ABCD$ nie można opisać okręgu to iloczyn długości przekątnych jest mniejszy niż suma iloczynów długości przeciwległych boków:

$$|AC| \cdot |BD| < |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \,.$$

Dowód standardowy Twierdzenia Ptolemeusza: (tylko podobieństwo trójkątów.)

Niech czworokąt $ABCD$ będzie wpisany w okrąg. Niech K będzie takim punktem na przekątnej AC, że $\angle ABD = \angle KBC$. Zauważamy, że trójkąty ΔABD i ΔKBC są podobne i dlatego $|KC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|$. Podobnie trójkąty ΔABK i ΔDBC są podobne i otrzymujemy $|AK| \cdot |BD| = |AB| \cdot |DC|$. Dodając otrzymane równości uzyskujemy tezę Twierdzenia Ptolemeusza.

Dowód niestandardowy Twierdzenia Ptolemeusza:

Niech $ABCD$ będzie dowolnym czworokątem. Przekształcamy płaszczyznę w inwersji względem dowolnego okręgu o środku w punkcie A. Niech B', C' i D' będą obrazami punktów B, C i D. Z nierówńsci trójkąta mamy $|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|$ i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu. Stosując wzór na odległość obrazów w inwersji otrzymujemy tezę Twierdzenia Ptolemeusza i nierówności Ptolemeusza.

Zadanie 8, I etap LXII OM

Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt K leży na boku BC i spełnia warunek $\angle BAM = \angle KAC$. Na odcinku AK wybrano taki punkt E, że $\angle BEK = \angle BAC$. Dowieść, że $\angle KEC = \angle BAC$.

Rozwiązanie standardowe: Załóżmy, że $AB < AC$. Oznaczmy $\alpha = \angle BAK$ oraz $\beta = \angle KAM$. Niech D będzie takim punktem, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem. Z założenia $\angle BEK = 2\alpha + \beta$, więc $\angle EBA = \alpha + \beta$. Oznacza to, że $\Delta EBA \sim \Delta CDA$ i $\frac{AE}{AC} = \frac{EB}{CD} = \frac{EB}{AB}$. Ponadto $\angle EBA = \alpha + \beta = \angle EAC$ co oznacza, że $\Delta EBA \sim \Delta EAC$. Stąd $\angle ACE = \alpha$ i $\angle KEC = \angle EAC + \angle ACE = 2\alpha + \beta$ co należało wykazać. Gdy $AB \geq AC$ rozumowanie jest analogiczne.

Rozwiązanie niestandardowe: Jeżeli AK jest symedianą w ΔABC to styczne do okręgu opisanego na ΔABC w punktach B i C oraz prosta AK są współpękowe.

Z treści rozważanego zadania wynika, że prosta AK jest symedianą w ΔABC. Niech styczne do okręgu opisanego na ΔABC w punktach B i C przecinają się w punkcie F. Prosta AK, jako symediana w ΔABC, przechodzi przez F. $\angle BCF = \angle BAC$ z twierdzenia o kącie pomiędzy styczną i cięciwą. Z założenia $\angle BAK = \angle BEF$ więc punkty B, E, C i F leżą na jednym okręgu. Z równości $BF = FC$ wynika, że $\angle BEF = \angle FEC$ co jest tezą zadania.

Zadanie 3, II etap Bundeswettbewerb Mathematik 1996

Na bokach trójkąta ABC zbudowano prostokąty ABB_1A_1, BCC_1B_2 oraz CAA_2C_2 skierowane na zewnątrz trójkąta. Wykazać, że symetralne odcinków A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie standardowe: Oznaczmy punkt przecięcia symetralnych AA_1 i CC_2 przez M_A punkt przecięcia symetralnych AA_1 i BB_2 przez M_B oraz punkt przecięcia symetralnych CC_2 i BB_2 przez M_C. Trójkąty ABC i $M_AM_BM_C$ są jednokładne. Niech S będzie punktem przecięcia prostych AM_A, BM_B i CM_C. Oznaczmy przez S_A obraz S w symetrii osiowej względem symetralnej AA_1, S_B obraz S w symetrii osiowej względem symetralnej BB_2 oraz przez S_C obraz S w symetrii osiowej względem symetralnej CC_2 Okazuje się, że rozważane w treści zadania symetralne są symetralnymi boków trójkąta $S_AS_BS_C$.

Rozwiązanie niestandardowe: Niech punkty M_A, M_B, M_C oraz S będą zdefiniowane jak w poprzednim rozwiązaniu. Okazuje się, że rozważane w treści zadania symetralne przecinają się w punkcie izogonalnie sprzężonym do punktu S.