æ

Warsztaty .12.12.2017.

Leszek Sidz

Kilka pomocnych wniosków z podobieństwa trójkątów.

Część 1. Twierdzenie o siecznych..

I.Teoria.

Twierdzenie 1.
Niech przez punkt A przechodzą dwie półproste. Na jednej z nich położone są punkty B i C, na drugiej punkty D i F. Wtedy zachodzi następująca równoważność :
Punkty B, C, D, E leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AD \cdot AE = AC \cdot AB.$$

Twierdzenie 2.
Niech punkt A będzie punktem przecięcia odcinków BC i DE. Wtedy zachodzi następująca równoważność :
Punkty B, C, D, E leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AD \cdot AE = AC \cdot AB.$$

Twierdzenie 3.
Jeżeli dany jest trójkąt ABD i punkt C , leżący na boku AD, to zachodzi następująca równoważność :
Odcinek AB jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie BDC wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

W poniższych zadaniach zobaczymy zastosowanie omówionych twierdzeń.

II. Zadania przykładowe.

Zadanie 1.
Skonstruuj okrąg styczny do danej prostej k i przechodzący przez dwa dane punkty A, B.

Zadanie 2.
Przez punkt P, leżący na wspólnej cięciwie AB dwóch przecinających się okręgów poprowadzono cięciwę KM pierwszego okręgu i cięciwę LN drugiego. Udowodnij, że na czworokącie KLMN można opisać okrąg.

Zadanie 3.
Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta k jest styczna do pierwszego w punkcie M , do drugiego w punkcie N. Udowodnij, że prosta AB dzieli MN na dwie równe części.

Zadanie 4.
Prosta OA jest styczna do okręgu w punkcie A a cięciwa BC tego okręgu jest do niej równoległa. Proste BO i OC przecinają okrąg w punktach K i L odpowiednio. Udowodnij, że prosta KL dzieli odcinek OA na pół.

Zadanie 5.
W równoległoboku $ABCD$ przekątna AC jest dłuższa niż BD. Okrąg opisany na trójkącie BCD przecina przekątną AC w punkcie M. Udowodnij, że BD jest wspólna styczną do okręgów opisanych na trójkątach ABM i ADM.

Zadanie 6.
Dany jest okrąg O i punkty A, B, leżące na zewnątrz niego. Dla dowolnej prostej l, przechodzącej przez punkt A , przecinającej dany okrąg w punktach M i N, rozważamy okrąg opisany na trójkącie BMN. Udowodnij, że wszystkie te okręgi mają, jeszcze jeden punkt wspólny oprócz punktu B.

Zadanie 7.
Punkty A i B leżą na danym okręgu, a punkt C na cięciwie AB. Prowadzimy dowolny okrąg O styczny do AB w punkcie C . Przecina on dany okrąg w punktach P i Q . Punkt przecięcia prostych AB i PQ oznaczamy przez M. Udowodnij, że punkt M jest stały, niezależnie od wyboru okręgu O.

Zadanie 8.

(MOM 95). Na prostej k wzięto kolejno cztery różne punkty A, B, C, D. Okręgi s_1, s_2 o średnicach AC i BD przecinają się w punktach X, Y. Na odcinku XY poza prostą k wzięto punkt O. Prosta CO przecina okrąg s_1 w punkcie M , prosta BO przecina okrąg s_2 w punkcie N , Udowodnij, że proste AM,DN,XY przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 9.
(Rosja 1994). Oznaczmy w trójkącie ABC przez a, b, c długości jego boków BC, AC, AB , a przez m_a, m_b, m_c długości środkowych AA', BB', CC' , opuszczonych na te boki. Nech R oznacza promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 10.
(Wlk. Bryt. 1996) Okręgi s_1, s_2 styczne zewntrznie w punkcie K są styczne wewnętrznie do okręgu s w puktach A_1, A_2 odpowiednio. Wsplna prosta styczna do s_1, s_2 poprowadzona przez K przecina okrąg s w punkcie P. Prosta PA_1 przecina s_1 w punkcie B_1, Prosta PA_2 przecina s_2 w punkcie B_2. Udowodnij, że prosta B_1B_2 jest wspólną styczną s_1, s_2.

Część 1. Nierówność Ptolemeusza.

Twierdzenie Ptolemeusza. Niech dany będzie czworokąt wypukły ABCD. Wtedy : Na czworokącie ABCD można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy , gdy ABCD + ADBC = AC BD.
Twierdzenie (Nierówność Ptolemeusza.) W dowolnym czworokącie ABCD zachodzi ABCD + ADBC AC BD. i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt można wpisać w okrąg.

Zadanie 1.
W czworokącie długości boków wynoszą kolejno $5, 6, 9, 7$ a przekątne 8 i 11. Czy na czworokącie tym da się opisać okrąg ?

Zadanie 2.
Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg. Punkt P leży na krótszym łuku AC tego okręgu. Udowodnij, że $PA + PC = PB$.

Zadanie 3.
Na kwadracie $ABCD$ opisano okrąg. Punkt P leży na krótszym łuku CD tego okręgu. Udowodnij, że $PA + PC = PB\sqrt{2}$.

Zadanie 4.
Udowodnij twierdzenie Pitagorasa za pomocą tw. Ptolemeusza.

Zadanie 13.
Na trójkącie ABC jest opisany okrąg . Dwusieczna kąta BAC przecina ten okrąg w punkcie S. Udowodnij, że $AB + AC < 2AS$.

Zadanie 5.
Udowodnić, że w dowolnym czworokącie $ABCD$ o długościach kolejnych boków $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ i polu S zachodzi :

$$S \leq \frac{1}{2}(ac + bd).$$

Zadanie 6.
Udowodnij, że w trójkącie

$$2m_b \leq m_a c + m_c a,$$

gdzie m_a jest dugością rodkowej na bok a (analogicznie m_b i m_c.)

Zadanie 7.
Udowonij, że $\frac{1}{sin(\frac{\pi}{7})} = \frac{1}{sin(\frac{2\pi}{7})} + \frac{1}{sin(\frac{3\pi}{7})}$.

Zadanie 8.
Odlwgłości środka okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny od jego bokówaa, b, c wynoszą d_a, d_b, d_c. Udowodnij, że $d_a + d_b + d_c = R + r$.