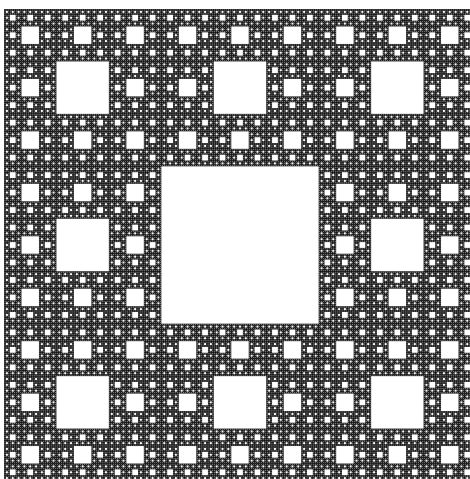


MIĘDZY WYMIARAMI CZYLI RZECZ O FRAKTALACH

1. Oblicz:

- (a) pole trójkąta Sierpińskiego,
- (b) objętość gąbki Mengera,
- (c) długość krzywej Kocha.

2. Przyjrzyj się uważnie zbiorowi umieszczonemu na poniższym rysunku.



Dywan Sierpińskiego¹

Opisz jego konstrukcję na dwa sposoby: metodą „podziel i usuń” oraz przy pomocy rodziny funkcji – postaraj się wypisać ich wzory.

3. Przypomnijmy, że wymiar fraktalny d (ang. *dimension*) zbioru samopodobnego jest rozwiązaniem równania

$$n = s^d,$$

gdzie s oznacza skalę podziału, natomiast n liczbę elementów podziału.

Korzystając jedynie z kalkulatora pozwalającego wyznaczyć pierwiastek kwadratowy, oszacuj z dokładnością do $\frac{1}{16}$:

- (a) wymiar fraktalny krzywej Kocha,
- (b) wymiar fraktalny gąbki Mengera.

Zastanów się jak poradzić sobie z tym zadaniem, jeśli Twój kalkulator nie wyznacza pierwiastka kwadratowego.

¹Rysunek pochodzi ze strony http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_carpet, aut. Joshi1983.

4. Do „odzyskiwania” wykładnika potęgi (czyli w naszym przypadku poszukiwania wymiaru fraktalnego) służy funkcja o nazwie *logarytm*. Logarytm przy podstawie a z liczby b zdefiniowany jest następująco:

$$\log_a b = c \quad \text{jeśli} \quad a^c = b.$$

- (a) Co musimy założyć o liczbach a, b, c , aby powyższe wyrażenia miały sens?
(b) Oblicz: $\log_2 4$, $\log_5 125$, $\log_3 \frac{1}{9}$, $\log_{49} 7$, $\log_4 \frac{1}{2}$, $\log_4 8$, $\log_a 1$.
(c) Spróbuj udowodnić następujące własności:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad \text{oraz} \quad \log_a b^c = c \cdot \log_a b.$$

- (d) Rozwiąż równania (pamiętajac o założeniach):

$$\log_5(3 - 2x) = 2, \quad \log_3(2x - 1) - 1 = \log_3(x - 2), \quad \frac{\log_2(4x)}{\log_2 x} = 3.$$

- (e) Wyraż przy pomocy logarytmu wymiary fraktalne:

- zbioru Cantora,
- krzywej Kocha,
- trójkąta Sierpińskiego,
- dywanu Sierpińskiego,
- gąbki Mengerera.

5. Zaproponuj własny fraktal. Opisz jego konstrukcję i oszacuj wymiar fraktalny.
6. Spróbuj zaprojektować fraktal imitujący jakiś obiekt naturalny (np. paproć, drzewo). Opisz jego konstrukcję przy pomocy rodziny funkcji.