Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

W krainie średnich

Agnieszka Zimnicka

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

MiNI Akademia Matematyki, 06/10/2018

Średnia arytmetyczna – AM

ang. *Arighmetic Mean*

Najsłynniejsza wśród średnich – dobrze określona dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}$

$$AM(a, b) = \frac{a + b}{2}.$$

Średnia arytmetyczna – AM

ang. *Arighmetic Mean*

Najsłynniejsza wśród średnich – dobrze określona dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}$

$$AM(a, b) = \frac{a+b}{2}.$$

Dla większej liczby elementów $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$AM(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Średnia geometryczna – GM

ang. *Geometric Mean*

Stosowana np. do uśredniania cech liczbowych różnego rzędu – zdefiniowana dla liczb nieujemnych (a najlepiej dodatnich) $a, b \geqslant 0$

$$GM(a, b) = \sqrt{a \cdot b}.$$

Średnia geometryczna – GM

ang. *Geometric Mean*

Stosowana np. do uśredniania cech liczbowych różnego rzędu – zdefiniowana dla liczb nieujemnych (a najlepiej dodatnich) $a, b \geqslant 0$

$$GM(a, b) = \sqrt{a \cdot b}.$$

Oczywiście równa zero, jeśli któraś z liczb jest równa zero.

Średnia geometryczna – GM

ang. *Geometric Mean*

Stosowana np. do uśredniania cech liczbowych różnego rzędu – zdefiniowana dla liczb nieujemnych (a najlepiej dodatnich) $a, b \geqslant 0$

$$GM(a, b) = \sqrt{a \cdot b}.$$

Oczywiście równa zero, jeśli któraś z liczb jest równa zero.

Dla n-ki liczb nieujemnych $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$GM(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Średnia kwadratowa – RMS lub QM

ang. *Root Mean Square*

Średnia stosowana przede wszystkim w statystyce, do określania rzędu wielkości danych/błędu – dla $a, b \in \mathbb{R}$

$$RMS(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Średnia kwadratowa – RMS lub QM

ang. *Root Mean Square*

Średnia stosowana przede wszystkim w statystyce, do określania rzędu wielkości danych/błędu – dla $a, b \in \mathbb{R}$

$$RMS(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

I ogólniej, dla $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$RMS(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Średnia harmoniczna – HM

ang. *Harmonic Mean*

Odwrotność średniej arytmetycznej z odwrotności liczb dodatnich $a, b > 0$

$$HM(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Przydatna w fizyce, gdy interesuje nas rząd wielkości pewnych ilorazów (np. prędkości na ustalonym dystansie).

Średnia harmoniczna – HM

ang. *Harmonic Mean*

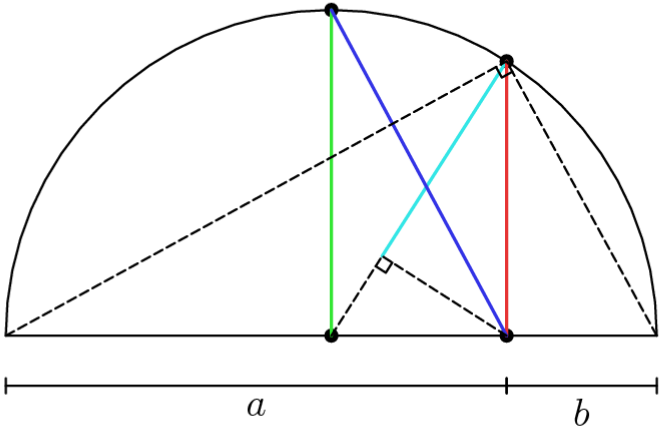
Odwrotność średniej arytmetycznej z odwrotności liczb dodatnich $a, b > 0$

$$HM(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

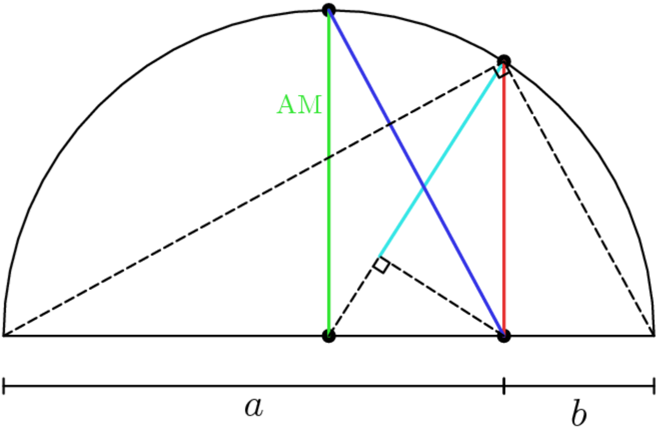
Przydatna w fizyce, gdy interesuje nas rząd wielkości pewnych ilorazów (np. prędkości na ustalonym dystansie).

I ogólniej, dla $a_1, \ldots, a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$,

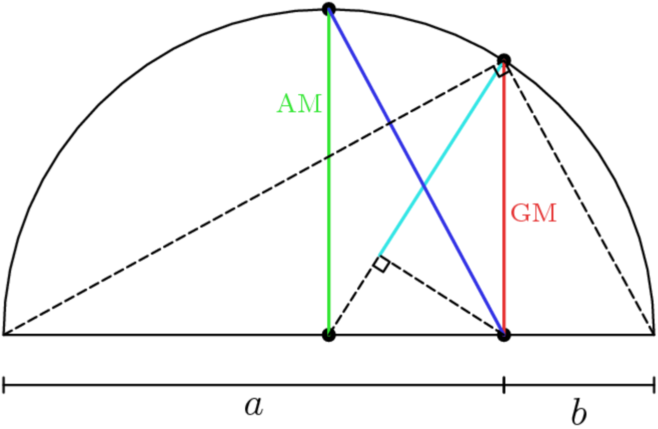
$$HM(a_1, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$



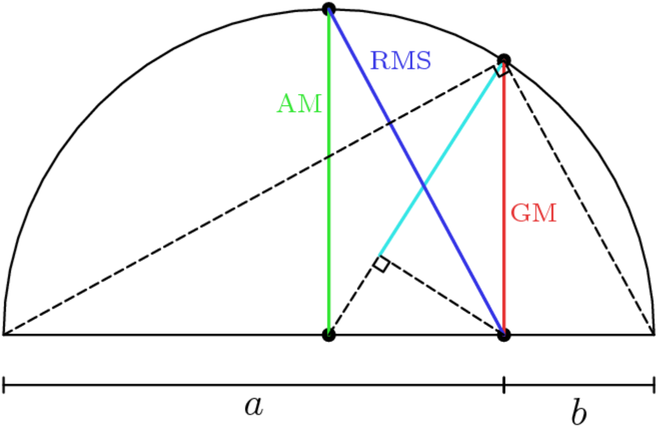
aut. ..... (Wikimedia Commons)



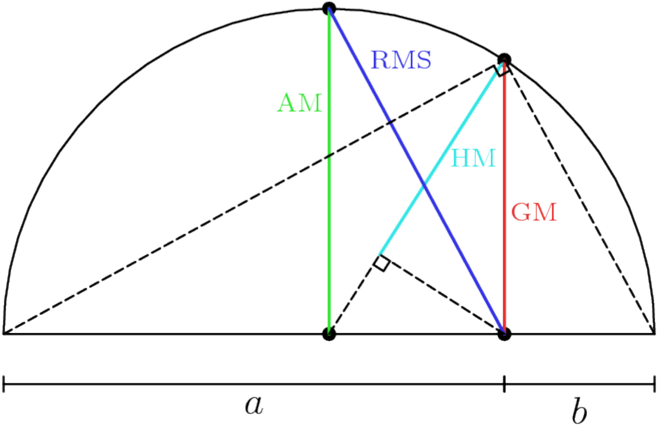
aut. ..... (Wikimedia Commons)



aut. ..... (Wikimedia Commons)



aut. ..... (Wikimedia Commons)



aut. ..... (Wikimedia Commons)

Nierówności między średnimi – dla dwóch liczb

Z geometrycznej interpretacji średnich wynika, że

$$RMS \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM.$$

Nierówności między średnimi – dla dwóch liczb

Z geometrycznej interpretacji średnich wynika, że

$$RMS \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM.$$ Sprawdźmy to!

Nierówności między średnimi – dla dwóch liczb

Z geometrycznej interpretacji średnich wynika, że

$$RMS \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM. \qquad \text{Sprawdźmy to!}$$

Weźmy dowolne $a, b \in (0, +\infty)$.

Nierówności między średnimi – dla dwóch liczb

Z geometrycznej interpretacji średnich wynika, że

$$RMS \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM. \qquad \text{Sprawdźmy to!}$$

Weźmy dowolne $a, b \in (0, +\infty)$. Wiemy, że

$$0 \leqslant \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b.$$

Nierówności między średnimi – dla dwóch liczb

Z geometrycznej interpretacji średnich wynika, że

$$RMS \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM. \qquad \text{Sprawdźmy to!}$$

Weźmy dowolne $a, b \in (0, +\infty)$. Wiemy, że

$$0 \leqslant \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b.$$

Stąd

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},$$

Nierówności między średnimi – dla dwóch liczb

Z geometrycznej interpretacji średnich wynika, że

$$RMS \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM. \qquad \text{Sprawdźmy to!}$$

Weźmy dowolne $a, b \in (0, +\infty)$. Wiemy, że

$$0 \leqslant \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b.$$

Stąd

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},$$

czyli

$$GM(a, b) \leqslant AM(a, b).$$

Jest to tak zwana nierówność $AM - GM$.

Nierówności między średnimi – dla dwóch liczb

Z geometrycznej interpretacji średnich wynika, że

$$RMS \geqslant AM \geqslant GM \geqslant HM. \qquad \text{Sprawdźmy to!}$$

Weźmy dowolne $a, b \in (0, +\infty)$. Wiemy, że

$$0 \leqslant \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a - 2\sqrt{ab} + b.$$

Stąd

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},$$

czyli

$$GM(a, b) \leqslant AM(a, b).$$

Jest to tak zwana nierówność $AM - GM$.

Przy czym $GM(a, b) = AM(a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

Nierówności między średnimi – dla trzech liczb

Weźmy na początek $x, y, z \in (0, +\infty)$ i obliczmy

$$(x + y + z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz\right) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Z nierówności $AM - GM$ dla dwóch liczb mamy, że

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geqslant 0,$$

czyli cała lewa strona nierówności jest nieujemna (i równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z$), więc

$$xyz \leqslant \frac{x + y + z}{3}.$$

Nierówności między średnimi – dla trzech liczb

Weźmy na początek $x, y, z \in (0, +\infty)$ i obliczmy

$$(x + y + z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz\right) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Z nierówności $AM - GM$ dla dwóch liczb mamy, że

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geqslant 0,$$

czyli cała lewa strona nierówności jest nieujemna (i równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z$), więc

$$xyz \leqslant \frac{x + y + z}{3}.$$

Biorąc $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$, otrzymujemy

$$GM(a, b, c) = \sqrt[3]{a, b, c} \leqslant \frac{a + b + c}{3} = AM(a, b, c).$$

Czy prawdą jest, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n > 0$ zachodzi nierówność

$$GM(a_1, \ldots, a_n) \leqslant AM(a_1, \ldots, a_n)\ ?$$

Na razie wiemy, że powyższa nierówność jest prawdziwa dla $n \in \{1, 2, 3\}$.

Hipoteza $AM - GM$

Czy prawdą jest, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \dots, a_n > 0$ zachodzi nierówność

$$GM(a_1, \dots, a_n) \leqslant AM(a_1, \dots, a_n)\ ?$$

Na razie wiemy, że powyższa nierówność jest prawdziwa dla $n \in \{1, 2, 3\}$.

Wystarczy pokazać, że jeśli nierówność $AM - GM$ jest prawdziwa dla jakiejś liczby naturalnej n (to znaczy dla dowolnych n liczb dodatnich), to jest prawdziwa także dla o jeden większej, czyli $n + 1$.

Hipoteza $AM - GM$

Czy prawdą jest, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n > 0$ zachodzi nierówność

$$GM(a_1, \ldots, a_n) \leqslant AM(a_1, \ldots, a_n)\ ?$$

Na razie wiemy, że powyższa nierówność jest prawdziwa dla $n \in \{1, 2, 3\}$.

Wystarczy pokazać, że jeśli nierówność $AM - GM$ jest prawdziwa dla jakiejś liczby naturalnej n (to znaczy dla dowolnych n liczb dodatnich), to jest prawdziwa także dla o jeden większej, czyli $n + 1$.

(Z jej prawdziwości dla $n = 3$ będzie wynikała prawdziwość dla $n = 4$, z prawdziwości dla $n = 4$ będzie wynikała prawdziwość dla $n = 5$ itd.)

Dowód

Ustalmy więc nasze ulubione $n \in \mathbb{N}$ i przypuśćmy, że dla dowolnej n-ki liczb nieujemnych nierówność $AM - GM$ jest prawdziwa, tzn.

$$\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = GM(b_1, \ldots, b_n) \leqslant AM(b_1, \ldots, b_n) = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

dla dowolnych $b_1, \ldots, b_n \geqslant 0$.

Dowód

Ustalmy więc nasze ulubione $n \in \mathbb{N}$ i przypuśćmy, że dla dowolnej n-ki liczb nieujemnych nierówność $AM - GM$ jest prawdziwa, tzn.

$$\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = GM(b_1, \ldots, b_n) \leqslant AM(b_1, \ldots, b_n) = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

dla dowolnych $b_1, \ldots, b_n \geqslant 0$.

Weźmy teraz $n+1$ liczb nieujemnych, ustawmy je w kolejności niemalejącej (zawsze tak możemy zrobić) i nazwijmy

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1}.$$

Dowód

Ustalmy więc nasze ulubione $n \in \mathbb{N}$ i przypuśćmy, że dla dowolnej n-ki liczb nieujemnych nierówność $AM - GM$ jest prawdziwa, tzn.

$$\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = GM(b_1, \ldots, b_n) \leqslant AM(b_1, \ldots, b_n) = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

dla dowolnych $b_1, \ldots, b_n \geqslant 0$.

Weźmy teraz $n + 1$ liczb nieujemnych, ustawmy je w kolejności niemalejącej (zawsze tak możemy zrobić) i nazwijmy

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1}.$$

Dla wygody oznaczmy $\alpha = GM(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_{n+1}}$,

Dowód

Ustalmy więc nasze ulubione $n \in \mathbb{N}$ i przypuśćmy, że dla dowolnej n-ki liczb nieujemnych nierówność $AM - GM$ jest prawdziwa, tzn.

$$\sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} = GM(b_1, \ldots, b_n) \leqslant AM(b_1, \ldots, b_n) = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$$

dla dowolnych $b_1, \ldots, b_n \geqslant 0$.

Weźmy teraz $n + 1$ liczb nieujemnych, ustawmy je w kolejności niemalejącej (zawsze tak możemy zrobić) i nazwijmy

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1}.$$

Dla wygody oznaczmy $\alpha = GM(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_{n+1}}$, wtedy oczywiście $a_1 \leqslant \alpha \leqslant a_{n+1}$.

Dowód

Skoro $a_1 \leqslant \alpha \leqslant a_{n+1}$, więc

$$(\alpha - a_1)(a_{n+1} - \alpha) \geqslant 0$$

Dowód

Skoro $a_1 \leqslant \alpha \leqslant a_{n+1}$, więc

$$(\alpha - a_1)(a_{n+1} - \alpha) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(a_1 + a_{n+1}) - a_1 a_{n+1} - \alpha^2 \geqslant 0$$

Dowód

Skoro $a_1 \leqslant \alpha \leqslant a_{n+1}$, więc

$$(\alpha - a_1)(a_{n+1} - \alpha) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(a_1 + a_{n+1}) - a_1 a_{n+1} - \alpha^2 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{a_1 a_{n+1}}{\alpha^2}}_{\text{ozn. } b_1} \leqslant \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_{n+1}}{\alpha} - 1.$$

Dowód

Skoro $a_1 \leqslant \alpha \leqslant a_{n+1}$, więc

$$(\alpha - a_1)(a_{n+1} - \alpha) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(a_1 + a_{n+1}) - a_1 a_{n+1} - \alpha^2 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{a_1 a_{n+1}}{\alpha^2}}_{\text{ozn. } b_1} \leqslant \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_{n+1}}{\alpha} - 1.$$

Zdefiniujemy n-kę liczb nieujemnych

$$b_1 = \frac{a_1 a_{n+1}}{\alpha^2}, \quad b_2 = \frac{a_2}{\alpha}, \ldots \quad b_n = \frac{a_n}{\alpha}.$$

Wówczas

$$b_1 \cdots b_n = \frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} = 1,$$

Dowód

Skoro $a_1 \leqslant \alpha \leqslant a_{n+1}$, więc

$$(\alpha - a_1)(a_{n+1} - \alpha) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(a_1 + a_{n+1}) - a_1 a_{n+1} - \alpha^2 \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{a_1 a_{n+1}}{\alpha^2}}_{\text{ozn. } b_1} \leqslant \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_{n+1}}{\alpha} - 1.$$

Zdefiniujemy n-kę liczb nieujemnych

$$b_1 = \frac{a_1 a_{n+1}}{\alpha^2}, \quad b_2 = \frac{a_2}{\alpha}, \ldots \quad b_n = \frac{a_n}{\alpha}.$$

Wówczas

$$b_1 \cdots b_n = \frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} = 1,$$

więc z naszego założenia prawdziwości $AM - GM$ dla dowolnej n-ki liczb wynika, że

$$1 \leqslant \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \quad \Rightarrow \quad n \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Dowód

Czyli mamy nierówności

$$\underbrace{\frac{a_1 a_{n+1}}{\alpha^2}}_{b_1} \leqslant \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_{n+1}}{\alpha} - 1 \quad \text{oraz} \quad n \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

Dowód

Czyli mamy nierówności

$$\underbrace{\frac{a_1 a_{n+1}}{\alpha^2}}_{b_1} \leqslant \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_{n+1}}{\alpha} - 1 \quad \text{oraz} \quad n \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

skąd otrzymujemy

$$n \leqslant \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_{n+1}}{\alpha} - 1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{\alpha} - 1,$$

Dowód

Czyli mamy nierówności

$$\underbrace{\frac{a_1 a_{n+1}}{\alpha^2}}_{b_1} \leqslant \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_{n+1}}{\alpha} - 1 \quad \text{oraz} \quad n \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

skąd otrzymujemy

$$n \leqslant \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_{n+1}}{\alpha} - 1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{\alpha} - 1,$$

czyli

$$GM(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \alpha \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} = AM(a_1, \ldots, a_{n+1}).$$

Co kończy dowód.

Ćwiczenia dla uczestników

1. Uzasadnić, że równość między średnią arytmetyczną a geometryczną zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są równe.

Ćwiczenia dla uczestników

1. Uzasadnić, że równość między średnią arytmetyczną a geometryczną zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są równe.

2. Korzystając z nierówności $AM - GM$ wyprowadzić pozostałe dwie nierówności między średnimi.

Podsumowując...

Dziękuję za uwagę $\smile$

Dziękuję za uwagę $\ddot\smile$

...i zapraszam na warsztaty $\ddot\smile$