

Od zasady szufladkowej do osobliwości niezderzeniowych

Co właściwie robią matematycy? Czym się zajmują? Niniejsza książka wyrosła z rozmaitych prób zmierzenia się z tymi pytaniami.

William Thurston w eseju *O dowodzie i o postępie w matematyce* pisze, że matematycy mają na ogół wrażenie, iż wiedza, czym jest matematyka, ale trudno im podać jej dobrą bezpośrednią definicję. Owa trudność wydaje mu się czymś istotnym, wskazującym na złożoną i rekurencyjną strukturę matematyki. Odnajduję lekką nutkę jego zawodowej ironii, gdy czytam, jak stwierdza, że można byłoby określić matematykę jako najmniejszą dziedzinę, spełniającą trzy warunki:

- matematyka obejmuje liczby naturalne oraz geometrię płaską i przestrzenną;
- matematyka jest przedmiotem badań matematyków;
- matematykami są ci ludzie, którzy zwiększają i pogłębiają nasze zrozumienie matematyki.

Kto zechce, może zbyć Thurstona lekceważącym prychnięciem, uznając, że matematyka, którą poznał w szkole czy na studiach i o której – jak o biologii, chemii, fizyce, literaturze czy muzyce – ma wszak pewne elementarne pojęcie, jest czymś szerszym, głębszym lub po prostu czymś innym. Znam jednak wielu ludzi, którzy zgodziliby się niemal bez zastrzeżeń z określeniem Thurstona, a sami siebie określają jako matematyków.

Na pytanie: *co właściwie robią matematycy?* Thurston odpowiada jasno: zwiększają i pogłębiają nasze zrozumienie matematyki. Przeciętnie uważny Czytelnik dostrzeże, że nie chodzi tu tylko ani nawet przede wszystkim o to, żeby kogoś uczyć, czy coś komuś objaśniać. Matematycy z definicji Thurstona nie tylko uczą innych, ale odkrywają nową matematykę, odnajdują matematykę znaną wcześniej, a także uczą się sami, od kolegów i z cudzych tekstów, nowych sposobów myślenia.

Jeden z moich warszawskich kolegów, Wojciech Guzicki, rzucił kiedyś w parosobowym gronie, że matematyki należy uczyć w szkole z trzech powodów. Po pierwsze, jest przydatna; po drugie, porządkuje myślenie; po trzecie, jest po prostu piękna. Przydatności, w sensie cywilizacyjnym, nikt poważny nie będzie zaprzeczał. Bez matematyki nie byłoby ani lotów kosmicznych, ani tomografu komputerowego, ani protokołów komunikacyjnych umożliwiających bezpieczne zakupy w Internecie, ani dokładnych krótkoterminowych prognoz pogody. Argument o porządkowaniu myślenia też przyjmują wszyscy: przeczytać zadanie, zrozumieć polecenie, wypisać dane i niewiadome, zastanowić się spokojnie, rozwiązać krok po kroku i sprawdzić, co właściwie wyszło, a zdobyte dzięki temu doświadczenie wykorzystywać (najlepiej ze zrozumieniem) w przyszłości. To, jak się wydaje, mogłoby dobrze służyć każdemu, niezależnie od tego, jaką drogę w życiu sobie wybierze.

Wzmianka o pięknie potrafi jednak budzić odruchy zdziwienia, a nawet sprzeciwu. Cóż pięknego tkwi, powiedzmy, w bolesnym zakuwaniu do klasówki z algebry? W rozwiązywaniu zadań o cenach bułek i ciastek albo stężeniach pomieszanych roztworów soli? Kłopot polega na tym, że ta część szkolnego oblicza matematyki *w odpowiednio złym wykonaniu* może mieć z matematyką jako taką mniej więcej tyle wspólnego, ile wspólnego z prawdziwą literaturą ma lekcja profesor Bładaczki, kładącej, że Słowacki wielkim poetą był.

Piękno tkwi w urodzie rozumowań, w przeżytych uczuciu zaskoczenia, w potwierdzonych intuicjach i odnalezionym zrozumieniu. Nie chciałbym tu nikogo uczyć; nie zamierzam przedstawiać żadnego przystępnego encyklopedycznego obrazu

współczesnej matematyki, bo sam widzę tylko jej skromny wy-cinek. Chcę natomiast opowiedzieć kilka historii o działalności moich kolegów po fachu. W niektórych będzie trochę szczegółów, zachęty do samodzielnego sięgnięcia po papier i ołówek lub inne narzędzia, w innych – tylko obrazowe i poglądowe opowiadki. Ja sam widzę w tych historiach zarówno potwierdzenie urody i przydatności matematyki, jak i ilustrację słów Thurstona o prawdziwej radości. Widzę w nich także świadectwo słuszności poglądu Davida Hilberta, że niemal cała matematyka polega na rozwiązywaniu problemów i zadań, a nowe teorie czy pojęcia są od tego, żeby pomóc owo rozwiązanie znaleźć lub wyrazić je w sposób przejrzysty i zrozumiały.

Pierwsza z tych historii wiąże się z zaskakującymi, otwartymi, a jednocześnie fundamentalnymi pytaniami, które wciąż zawiera bardzo klasyczna dziedzina: matematyczne podstawy mechaniki Newtona. Dość niedawno, pod sam koniec XX wieku, okazało się na przykład, że w świecie mechaniki newtonowskiej, gdy zanie-dbamy efekty relatywistyczne, możliwa jest podróż do nieskoń-czoności w skończonym czasie. Może się zdarzyć, że kilka ciał, poddanych wyłącznie działaniu grawitacji, wpadnie w szalony, coraz szybszy taniec; jedno z nich będzie na przemian usiłowa-ło zderzyć się z pozostałymi i bardzo od nich oddalić, ale okaże się, że ani to pierwsze, ani to drugie – ani ostateczne zderzenie, ani trwałe oddalenie na bezpieczną odległość – nie jest możliwe. Brzmi to jak zły scenariusz filmu *science fiction*, zacznijmy więc od czegoś znacznie prostszego.

Chodzi mi o zasadę szufladkową Dirichleta: jeśli do n szuflad włożymy $n + 1$ (lub więcej) listów, to w pewnej szufladzie znaj-dą się co najmniej dwa listy. Jest to stwierdzenie tak oczywiste, na pozór wręcz banalne, że trudno sobie wyobrazić, by mogło prowadzić do jakichś szczególnie zaskakujących wniosków. Każ-dy słyszał, że w odpowiednio dużym mieście z pewnością są dwie osoby, które mają tyle samo włosów na głowie (nie po-trafimy jednak łatwo takich osób wskazać), a w każdej szkole, do której chodzi przynajmniej 367 uczniów, na pewno są tacy, którzy obchodzą urodziny tego samego dnia (i nie trzeba uważ-

nie przeglądać wszystkich dzienników, żeby przekonać się, że to prawda).

Spójrzmy na bardziej matematyczny przykład: wśród każdych 501 liczb wybranych spośród $1, 2, \dots, 1000$ na pewno są dwie takie, z których jedna dzieli drugą bez reszty. Tu akurat nie od razu widać, jak zastosować zasadę szufladkową. Gdybyśmy jednak zapisali każdą z 501 wybranych liczb jako iloczyn pewnej liczby nieparzystej i pewnej potęgi dwójki, tzn. w postaci $2^m \cdot (2l + 1)$, to zauważylibyśmy, że nie wszystkie czynniki nieparzyste są różne. Istotnie, nie mogą być różne, bo jest ich 501, a możliwości wyboru tylko 500, gdyż tylko co druga liczba wśród $1, 2, \dots, 1000$ jest nieparzysta. Wśród wybranych 501 liczb są więc z pewnością dwie, powiedzmy a i b , które mają ten sam czynnik nieparzysty, tzn.

$$a = 2^m \cdot (2l + 1), \quad b = 2^k \cdot (2l + 1).$$

Jeśli 2^m jest większe niż 2^k (a przecież możemy przyjąć, że tak jest, bo gdyby było na odwrót, to moglibyśmy zamienić oznaczenia obu liczb), to b dzieli a : w liczniku i mianowniku ułamka a/b można skrócić wspólny czynnik nieparzysty, a mniejsza potęga dwójki z pewnością dzieli większą potęgę. Innymi słowy, $a/b = 2^{m-k}$; wynik dzielenia jest całkowity.

Mój ulubiony przykład zastosowania zasady szufladkowej Dirichleta jest w gruncie rzeczy podobny. Różnica polega na tym, że jeszcze mniej oczywiste jest, czym mają być szufladki i jak się nimi posłużyć, a wnioski są, dla wielu osób, bardziej zaskakujące. Chodzi mi o twierdzenie, które orzeka, że każdy skończony, niezaczynający się od zera ciąg cyfr widnieje na początku (tzn. z lewej strony) rozwinięcia dziesiętnego wielu różnych potęg dwójki. Na przykład, data urodzin każdego Polaka (z numerami PESEL i NIP dorzuconymi na dodatek) znajduje się na początku zapisu dziesiętnego nieskończenie wielu potęg dwójki.

To samo można powiedzieć nie tylko o datach. Istnieją wykładniki n , dla których zapis dziesiętny 2^n zaczyna się od ciągu utworzonego z wypisanych po kolei wszystkich numerów z książki adresowej mojego telefonu komórkowego. Pisząc te słowa, nie

potrafię wprowadzić podać żadnej takiej liczby n , ale mimo to mam uczucie niezachwianej pewności, które nie zawsze towarzyszy mi w życiu. Takie uczucie pewności daje matematykowi dowód. Jedną z radości, których dostarcza obcowanie z matematyką, jest właśnie to, że dzięki dowodom można być pewnym różnych rzeczy nieoczywistych.

Nawet dla ciągów jednocyfrowych teza wspomnianego twierdzenia nie jest oczywista. Gdy zaczniemy wypisywać początkowe cyfry liczb 2^n dla $n = 0, 1, 2, \dots$, to ujrzymy następujący wzór:

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,
 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,
 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,
 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, ...

Siódemka i dziewiątki (na razie) ani śladu, prawda?

Co więcej, komuś niecierpliwemu i nieuważnemu może przyjść do głowy myśl, że ciąg początkowych cyfr potęg dwójki jest okresowy i wszystko w nim powtarza się regularnie, co 10 miejsc. To jednak tylko złudzenie, którego przyczyną jest to, że $2^{10} = 1024$ jest niezłym przybliżeniem liczby 1000. Mnożenie liczby przez 1000 polega przecież na dopisywaniu trzech zer na końcu jej zapisu dziesiętnego i nie ma najmniejszego wpływu na początkowy fragment tego zapisu. Gdy wielokrotnie mnożymy przez 1024, drobne i początkowo niezbyt istotne dodatki z końcowych fragmentów zapisu dziesiętnego zaczynają kumulować się i wzbierać, rozlewając się stopniowo coraz dalej w lewo. Gdybym wypisał wyżej piąty wiersz początkowych cyfr potęg dwójki, to zamiast szóstki byłyby w nim siódemka. Siódemkę zobaczylibyśmy też – na tym samym miejscu! – w kolejnych wierszach, aż do dziesiątego. W jedenastym wierszu miejsce siódemki zajmie ósemka. Obejrzawszy kilkaset takich wierszy po 10 cyfr, można zobaczyć siódemki (i dziewiątki) w różnych miejscach, zjawiające się nieuchronnie, ale w sposób, który trudno uznać za idealnie okresowy.

Aby udowodnić, że siódemka jest początkową cyfrą nieskończonej potęg dwójki, trzeba wyjść poza krąg najprostszych eksperymentów i zrozumieć, co to znaczy, że zapis dziesiętny

liczby 2^n zaczyna się od siódemki. Otóż, jest tak wtedy, gdy 2^n znajduje się między dwiema liczbami: pierwszą z nich jest siódemka z pewną liczbą zer na końcu, a drugą ósemka z taką samą liczbą zer. Wszystkie liczby między tymi dwiema zaczynają się od siódemki. I na odwrót, każdą liczbę, która ma za pierwszą cyfrę siódemkę, można wstawić w jeden z przedziałów o końcach $70 \dots 0$ i $80 \dots 0$ (gdzie zer jest w obu liczbach tyle samo).

Teraz, żeby było poręczniej, użyjmy symboli: 7 jest pierwszą cyfrą liczby 2^n wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego naturalnego k mamy $7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$. Aby dostać prostszy, równoważny zapis, zlogarytmujemy te nierówności stronami. Jako podstawę logarytmu wybierzemy 10, bo potęga dziesiątki występuje w naszym warunku aż dwukrotnie. Logarytmując, otrzymujemy $k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$. Ponieważ liczby $\log 7$ i $\log 8$ należą do przedziału $(0, 1)$, więc k jest częścią całkowitą liczby $n \log 2$, tzn. $k = [n \log 2]$ (nawiasów kwadratowych użyjemy do oznaczania części całkowitej). Odejmując k od uzyskanych nierówności, dostaniemy ostatecznie

$$\log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8.$$

Być może czymś zdaniem to wyrażenie jest bardziej zagadkowe od potocznej frazy *7 jest pierwszą cyfrą liczby 2^n* , ale za to łatwiej jest poddać je analizie. Zanim to zrobimy, zwróćmy uwagę na jedną rzecz. Otóż, logarytmowanie pozwoliło zamienić obserwację potęg dwójki, rosnących bardzo szybko i rozmieszczonych na osi liczbowej w coraz większych odstępach, w analizowanie kolejnych wielokrotności $\log 2$, które rosną znacznie wolniej, a na osi liczbowej rozmieszczone są równomiernie, jak koraliki na sznurku albo słupki kilometrowe przy prostej szosie. Udało się stwierdzić, że poszukiwanie potęg dwójki z pierwszą cyfrą 7 jest tym samym, co sprawdzanie, czy któryś z wyrazów ciągu $a_n := nx - [nx]$, gdzie $x = \log 2$, a $n = 0, 1, 2, \dots$, trafi do przedziału o końcach $\log 7$ i $\log 8$.

Mówiąc nieco mętnie, to trochę tak, jakbyśmy zdołali spojrzeć na badane zjawisko z innej perspektywy, dostrzegając w nim – dzięki doborowi skali lub przyrządu do obserwacji – pewną rów-

nomierność i symetrię. Obserwujemy na osi liczbowej ślady wędrowki kogoś, kto wyruszył z zera i stawia równe kroki długości $x = \log 2$. Interesują nas nie miejsca, gdzie wędrowiec stawiał stopy (to są liczby nx), ale odległości tych miejsc od najbliższych (z lewej strony) liczb całkowitych. Owe odległości to właśnie liczby $a_n = nx - [nx]$.

Gdyby na przykład $x = 41/137$, ciąg a_n części ułamkowych kolejnych wielokrotności x byłby okresowy: wyrazy o numerach różniących się o 137 byłyby równe. Podobnie byłoby dla każdej liczby wymiernej x . *Jednak $\log 2$ nie jest liczbą wymierną*: gdyby $\log 2 = p/q$, to wprost z definicji logarytmu mielibyśmy $10^{p/q} = 2$, czyli $10^p = 2^q$, co jest niemożliwe (lewa strona dzieli się przez 5, a prawa nie). Kluczową i przełomową dla całego rozumowania konsekwencją niewymierności $x = \log 2$ jest to, że *wszystkie wyrazy ciągu a_n są różne*. Gdyby bowiem $a_n = a_m$ dla jakichś $n \neq m$, to przekształcając równość $nx - [nx] = mx - [mx]$, zapisalibyśmy x jako ułamek o liczniku i mianowniku całkowitym, $x = ([nx] - [mx]) / (n - m)$. Wiemy jednak, że $x = \log 2$ takim ułamkiem nie jest!

Teraz, idąc za ciosem, możemy zrozumieć całą sytuację do końca.

Podzielmy najpierw odcinek $[0, 1]$ na m równych przedziałów, wybierając m tak, żeby długość każdej części była mniejsza niż $\log 8 - \log 7$ (kto posłuży się np. kalkulatorem, zobaczy, że wystarczy w tym celu wziąć $m = 18$; jakkolwiek liczba $m > 18$ też byłaby dobra). Ponieważ liczby a_n są różne, więc któreś dwie spośród a_1, a_2, \dots, a_{m+1} - powiedzmy a_s i a_{s+k} - należą do tego samego przedziału długości $1/m$. (Tu, jak widać, skorzystaliśmy z zasady szufladkowej!)

Jak otrzymać a_{s+k} , gdy znamy a_s ? To nietrudne; obserwujemy wszak wędrowkę równymi krokami po osi liczbowej i mierzymy odstępów śladów wędrowca od ostatniej miniętej liczby całkowitej. Po s krokach wędrowiec znajduje się w punkcie sx , w odległości a_s od ostatniej miniętej liczby całkowitej, którą jest $[sx]$. Gdy zrobi k kolejnych kroków, znajdzie się w punkcie $(s+k)x$, w odległości a_{s+k} od ostatniej miniętej liczby całkowitej, którą jest $[(s+k)x]$. Jednak liczby a_s i a_{s+k} różnią się tylko nieznacznie: