Liczbą naturalną nazywamy liczbę całkowitą nieujemną, oznaczamy $\mathbb{N} := \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Silnią liczby naturalnej n nazywamy

$$n! := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & n > 0 \end{cases},$$

czyli bardziej po ludzku, silnia liczby n jest to iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n włącznie, oraz przyjmujemy, że $0! = 1$.

Symbolem Newtona "n nad k" nazywamy

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie $n, k \in \mathbb{N}$ oraz $n \geqslant k$, gdy $n < k$, to przyjmujemy ponadto, że $\binom{n}{k} := 0$.

Lakoniczna interpretacja kombinatoryczna silni liczby n: jest to liczba możliwości ustawienia n osób w kolejkę.

Lakoniczna interpretacja kombinatoryczna symbolu Newtona "n nad k": jest to liczba możliwości wyboru k rzeczy spośród n rzeczy.

Skrócony zapis dodawania $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Skrócony zapis mnożenia $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Uwaga. We wszystkich zadaniach, o ile nie jest powiedziane inaczej, występujące zmienne są liczbami naturalnymi dobranymi tak, by odpowiednie wyrażenia miały sens liczbowy.

Zadanie 1. *Michał ma przed sobą 10 różnych cukierków. Michał zastanawia się nad tym, ile by zjeść cukierków, może zjeść wszystkie, może zjeść kilka, może też być przypadek, że będzie się zastanawiał tak długo, że odechce mu się jeść.*
Jak dużo Michał ma możliwości zjedzenia cukierków?

Zadanie 2. *Na przyjęcie do Michała przyszło kilku jego znajomych. Michał zauważył, że każdy z każdym na przyjęciu przywitał się dokładnie raz uściśnięciem dłoni oraz tych uścisków było dokładnie 45. Ile osób było na przyjęciu?*

Zadanie 3. *Udowodnić 'lakoniczne' interpretacje silnii oraz symbolu Newtona.*

Zadanie 4. *6 osób wsiada do windy na parterze w bloku 10 piętrowym. Do windy nikt się już nie dosiada oraz wszystkie osoby opuszczają windę na jakimś piętrze o numerze od 1 do 10. Policz na ile sposobów mogą to uczynić, jeżeli*

(a) *nie ma żadnych dodatkowych warunków.*

(b) *każda z osób wysiada na różnych piętrach.*

(c) *wszyscy wysiądą na tym samym piętrze.*

(d) *czworo z nich wysiądzie na piętrach $1-6$, pozostali na piętrach $7-10$.*

(e) *czworo z nich wysiądzie na piętrach $1-6$, pozostali na piętrach $7-10$, i każdy wysiądzie na innym piętrze.*

(f) *wszyscy wysiądą na dokładnie dwóch różnych piętrach.*

Zadanie 5. *Uzasadnić równość* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Zadanie 6. *Uzasadnić równość* $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Zadanie 7. *Uzasadnić równość* $k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$.

Zadanie 8. *Uzasadnić równość* $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

Zadanie 9. *Uzasadnić równość* $\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$.
Podpowiedź: Przekształcić do $\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2}{1}\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \binom{2}{2}\binom{2n}{n-1}$.

Zadanie 10. *Uzasadnić równość* $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$.

Zadanie 11. *Uzasadnić równość* $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$.

Zadanie 12. *Uzasadnić równość* $\binom{n}{h}\binom{n-h}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{h}$.

Zadanie 13. *Uzasadnić równość* $\binom{3n}{3} = n^3 + 6\binom{n}{2}\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3}$.

Zadanie 14. *Załóżmy, że mamy dwa punkty* $A(0,0)$ *oraz* $B(m,n)$, *gdzie* $m, n \in \mathbb{N}_+$. *Ile jest najkrótszych dróg między* A *i* B, *jeżeli możemy poruszać się po odcinkach jednostkowych równoległych do osi układu współrzędnych?*

Zadanie 15. *Niech* $a, b \in \mathbb{R}$. *Udowodnić (wzór dwumianowy Newtona):*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Zadanie 16. *Uzasadnić równość:* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Zadanie 17. *Uzasadnić równość* $\binom{m+n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{n-k}$.

Zadanie 18. *Uzasadnić równość* $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Zadanie 19. *Uzasadnić równość* $\binom{m+n}{k} = \sum_{s=0}^{k} \binom{m}{s}\binom{n}{k-s}$.

Zadanie 20. *Udowodnić zasadę pochłaniania:* $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Zadanie 21. *Niech* f_n *będzie ciągiem Fibonacciego, zdefiniowanym następująco:* $\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ n > 1 \end{cases}$.
Uzasadnić równość $\sum_k \binom{n-k}{k} = f_n$.

Zadanie 22. *Mamy schody złożone z* n *stopni. Wchodząc po tych schodach modczas jednego 'kroku' możemy albo wskoczyć o jeden albo dwa stopni do góry. Na ile sposobów możemy wejść po tych schodach?*

Zadanie 23. *Uzasadnić równość* $m^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(m-1)^{n-k}$.

Zadanie 24. *Uzasadnić równość* $\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m}2^m$.

Zadanie 25. *Uzasadnić równość* $\binom{n}{f}\binom{n}{m} = \sum_{j=0}^{f} \binom{f}{f-j}\binom{m+j}{f}\binom{n}{m+j}$

Zadanie 26. *Rozważmy równanie:* $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = m$*, gdzie* $x_1, x_2, \ldots, x_k \geqslant 1$*.*
Udowodnić, że liczba rozwiązań tego równania jest równa $\binom{m-1}{k-1}$*.*

Zadanie 27. *Rozważmy równanie:* $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n$*, gdzie* $x_1, x_2, \ldots, x_k \geqslant 0$*.*
Udowodnić, że liczba rozwiązań tego równania jest równa $\binom{n+k-1}{k-1}$*.*

Zadanie 28. *Znaleźć liczbę rozwiązań równania* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$ *w liczbach całkowitych, gdy dodatkowo chcemy, by* $x_1 > -5$*,* $x_2 > 0$*,* $x_3 \geqslant 2$*,* $x_4 \geqslant 4$*.*

Zadanie 29. *Na przyjęcie do Michała przyszło* 10 *osób. Michał ma* 100 *takich samych czekoladek i chce każdej osobie na przyjęciu dać co najmniej* 4 *czekoladki. Ile ma on możliwości rozdzielenia cukierków wśród gości?*

Zadanie 30. *Uzasadnić równość* $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Zadanie 31. *Uzasadnić równość* $\sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n}{k} = n2^{n-1}$*.*

Zadanie 32. *Uzasadnić równość* $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$*.*

Zadanie 33. *Uzasadnić równość* $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)2^{n-3}$*.*

Zadanie 34. *Znaleźć wzór na* $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$*.*

Zadanie 35. *Znaleźć wzór na* $\sum_{k=0}^{n} k^3\binom{n}{k}$*.*

Zadanie 36. *Uzasadnić równość* $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$*.*

Zadanie 37. *Uzasadnić równość* $1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}$*.*

Zadanie 38. *Uzasadnić równość* $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$*.*
Podpowiedź: Dla $k = 1$ *otrzymujemy poprzednie zadanie.*

Zadanie 39. *Uzasadnić równość* $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$*.*

Zadanie 40. *Uzasadnić równość* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$*.*

Zadanie 41. *Uzasadnić równość* $\sum_{k=0}^{n} k(n-k)\binom{n}{k}^2 = n^2\binom{2n-2}{n-1}$

Zadanie 42. *Znaleźć wzór na* $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$*.*

Zadanie 43. *Uzasadnić równość* $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$

Zadanie 44. *Uzasadnić równość* $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$

Zadanie 45. *Uzasadnić równość* $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}.$

Zadanie 46. *Uzasadnić równość* $\sum\limits_{i=0}^{n} 5^{n-i}\binom{n}{i} = 6^n.$

Zadanie 47. *Uzasadnić równość* $\binom{n}{k}^2 = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k+j}{k}\binom{n}{k+j}.$

Zadanie 48. *Uzasadnić równość* $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{m}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{2m+1}.$

Zadanie 49. *Uzasadnić równość* $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}.$

Zadanie 50. *Uzasadnić równość* $\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n} = n!\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1).$

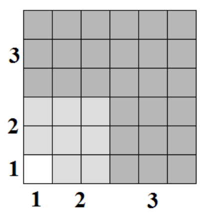
Zadanie 51. *Uzasadnić równość* $\binom{2n}{n}n! = 2^n\prod\limits_{i=1}^{n}(2i-1).$
Podpowiedź: $2n$ dzieci ściga się w parach. Nauczyciel notuje wyniki: kto z kim się ściga i kto wygrał w danej parze. Nie są możliwe remisy.

Zadanie 52. *Uzasadnić straszną równość:*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}k!\cdot\prod_{i=1}^{n-k}(2i-1)\right) + \binom{2n}{n}n! = 3^n\prod_{i=1}^{n}(2i-1)$$

Podpowiedź: Bardzo podobne do poprzedniego zadania, tylko możliwe są remisy (wyścigów bez remisów jest k).

Zadanie 53. *Uzasadnić równość* $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2.$
Podpowiedź (jedno rozwiązanie): Rozważyć ile jest prostokątów na szachownicy $n\times n$ o bokach równoległych do boków szachownicy.
Podpowiedź (drugie rozwiązanie): Szachownicę o boku T_n ($T_n = 1+2+\ldots+n$) dzielimy na T_n^2 kwadratów jednostkowych, a następnie na n części, jak na poniższym rysunku. Niech a_k - oznacza liczbę kwadratów jednostkowych



$\mathbf{T_3 = 6}$

w k-tej części. Pokazać, że $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = T_n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \binom{n+1}{2}^2.$