MiNI Akademia Matematyki na Politechnice Warszawskiej

Krzysztof Chełmiński

Nieskończone sumowanie

MiNI PW, 18.10.2014

Achilles nie dogoni żółwia

Zenon z Elei (V wiek p.n.e.) twierdził że Achilles nigdy nie dogoni żółwia. Dlaczego? Jego rozważania opierały się na przekonaniu, że

suma nieskończenie wielu liczb dodatnich musi być nieskończona.

Jak rozumował Zenon z Elei:

zakładamy, że Achilles i żółw poruszają się wzdłuż pewnej prostej w tą samą stronę. Oznaczmy przez P_0 punkt, w którym na tej prostej znajduje się Achilles a przez P_1 punkt, w którym znajduje się żółw. Achilles biegnie w kierunku żółwia i gdy osiągnie punkt P_1 żółw przesunie się do punktu P_2. Gdy Achilles dobiegnie do P_2 żółw dotrze do punktu P_3. I ogólnie jak Achilles już osiągnie punkt P_k żółw w tym czasie przesunie się do punktu P_{k+1}. Widzimy więc, że droga jaką musi pokonać Achilles jest równa sumie długości odcinków

$$|P_0P_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + \dots$$

Wszystkie te odcinki mają dodatnią długość, więc Achilles musi pokonać drogę o nieskończonej długości, na co potrzebuje nieskończonego czasu!

Doświadczenie pokazuje jednak, że Achilles dogania żółwia.

Wyjaśnienie paradoksu

Oznaczmy $a = |P_0P_1|$ i załóżmy, że Achilles biegnie 20 razy szybciej niż żółw. Wtedy droga d, którą musi pokonać Achilles wynosi

$$d = a + \frac{a}{20} + \frac{a}{20^2} + \frac{a}{20^3} + \ldots = a(1 + \frac{1}{20} + \frac{1}{20^2} + \frac{1}{20^3} + \ldots)$$

Wykażemy, że droga, którą pokonuje Achilles jest skończona. W tym celu zastanowimy się jak nadać sens nieskończonej sumie

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Obliczymy sumę n pierwszych wyrazów tego nieskończonego sumowania (n-ta suma częściowa)

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

Gdy $x \neq 1$ zauważamy, że

$$S_n(1-x) = 1 - x + x - x^2 + x^2 + \ldots - x^{n-1} + x^{n-1} - x^n = 1 - x^n \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Stąd wnioskujemy, że gdy $x \in (0,1)$ to $S_n < \frac{1}{1-x}$ co w naszym paradoksie oznacza, że

$$d \leq \frac{20}{19}a$$

Granica ciągu

Definicja
Mówimy, że ciąg liczbowy $\{a_n\}$ *ma granicę* g *i zapisujemy* $a_n \to g$ *lub* $\lim_{n\to+\infty} a_n = g$ *jeżeli dla dowolnej liczby dodatniej* ε *mozna znaleźć liczbę naturalną* N_ε*, taką że od wyrazu z indeksem* N_ε *zachodzi*

$$g - \varepsilon \leq a_n \leq g + \varepsilon\,.$$

Twierdzenie

(a) Każdy ciąg ograniczony i monotoniczny ma granicę.

(b) (twierdzenie o trzech ciągach)
Jeżeli od pewnego miejsca zachodzą nierówności $b_n \leq a_n \leq c_n$ *i dodatkowo* $b_n \to g$ *i* $c_n \to g$ *to także* $a_n \to g$

Suma szeregu

Definicja

Mówimy, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny jeżeli ciąg sum częściowych*

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

ma granicę $s_n \to s$. *Wtedy piszemy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

Przykłady

(a) Niech $a > 0$, $\quad \sum_{i=0}^{\infty} a\frac{1}{20^i} \qquad s_n = a\frac{1-\frac{1}{20^n}}{1-\frac{1}{20}} = \frac{20}{19}a - \frac{20}{19}a\frac{1}{20^n} \to \frac{20}{19}a$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n+1} \to 1$$

(c) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1}$

$$s_{2n} = 0\,, \quad s_{2n+1} = 1$$

Ciąg sum częściowych nie posiada granicy i rozważany szereg jest rozbieżny.

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Twierdzenie

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny to* $a_n \to 0$.

Dowód Dla $n \geq 2$ mamy $a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$.

Przykłady

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

Ciąg $(-1)^{n+1}$ nie ma granicy i szereg jest rozbieżny.

(b) (szereg harmoniczny) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} \to 0$ i warunek konieczny jest spełniony. Pozwala to tylko na stwierdzenie, że dalej nie wiemy czy rozważany szereg jest zbieżny.

Szeregi o wyrazach nieujemnych

Kryterium porównawcze

Załóżmy, że wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *spełniają nierówności* $0 \leq a_n \leq b_n$*. Wówczas*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_n$$

(ze zbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *wynika zbieżność* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oraz z rozbieżności* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *wynika rozbieżność* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.)*

Dowód Oznaczając przez A_n i B_n sumy częściowe szeregów $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{i=1}^{\infty} b_n$ wnioskujemy, że $A_n \leq B_n$. Stąd natychmiast wynika teza gdyż ciągi te są rosnące.

Przykład

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny gdyż możemy go porównać z poznanym już szeregiem $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
Widzimy, że od wyrazu drugiego mamy $\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{1 \cdot 2}$, $\frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{2 \cdot 3}$, . . .

Szeregi o wyrazach nieujemnych

Kryterium kondensacyjne

Załóżmy, że wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *są nieujemne oraz* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$. *Oznaczmy przez* $b_k = 2^k a_{2^k}$. *Wówczas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{jest zbieżny} \ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{jest zbieżny}\,.$$

Dowód Niech A_n będzie sumą częściową $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz B_k sumą częściową $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Wtedy

$$\begin{aligned}
A_{2^k} &= a_1 + \overbrace{a_2 + a_3}^{\leq 2a_2} + \overbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}^{\leq 4a_4} + \overbrace{a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k-1}}^{\leq 2^{k-1} a_{2^{k-1}}} + a_{2^k} \\
A_{2^k} &= a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq 2a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\geq 4a_8} + \ldots + \underbrace{a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}}_{\geq 2^{k-1} a_{2^k}}
\end{aligned}$$

Stąd mamy $A_{2^k-1} \leq a_1 + B_{k-1}$ oraz $A_{2^k} \geq a_1 + \frac{1}{2} B_k$ i ciąg A_k jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy ciąg B_k jest ograniczony.

Przykład

Zastosujemy kryterium kondensacyjne do szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ gdzie $p > 0$. Wtedy

$$b_k = 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \frac{1}{(2^{p-1})^k}\,.$$

Zatem szereg $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jest geometryczny. Więc jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $0 < \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ co jest równoważne z nierównością $p > 1$. Otrzymaliśmy następujący wynik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ jest zbieżny} \Leftrightarrow p > 1\,.$$

W szczególności dla $p = 1$ mamy, że szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Jednakże sumy częściowe tego szeregu rosną bardzo wolno

$$A_{10} \approx 2,93\,, \quad A_{20} \approx 3,6\,, \quad A_{100} \approx 5,19\,, \quad A_{200} \approx 5,88$$

Szeregi o wyrazach dowolnych

Definicja

(a) Mówimy, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie jeżeli zbieżny jest szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(b) Mówimy, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny warunkowo jeżeli jest zbieżny ale szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *jest rozbieżny.*

Fakt Każdy szereg zbieżny bezwzględnie jeżeli zbieżny.

Dowód Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie to szeregi utworzone z jego nieujemnych i ujemnych wyrazów są zbieżne. Więc

$$A_n = (\text{suma wszystkich wyrazów } a_i \geq 0\,,\ i \leq n) - (\text{suma wszystkich wyrazów } |a_i|\,, a_i < 0\,,\ i \leq n)\,.$$

Sumy w nawiasach są sumami częściowymi szeregów zbieżnych więc A_n ma granicę.

Przykład

Szereg anharmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ jest zbieżny warunkowo (dowód na ćwiczeniach).

Twierdzenie Riemanna

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny warunkowo to przez zmianę kolejności jego wyrazów można uzyskać szereg zbieżny do dowolnie wybranej sumy s.

Dowód Niech $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ będzie szeregiem zbudowanym z wszystkich nieujemnych wyrazów a_k oraz $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ niech będzie szeregiem zbudowanym z wszystkich wyrazów $|a_k|$ takich, że $a_k < 0$. Stąd, że szereg wyjściowy jest warunkowo zbieżny wnioskujemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$. Zaczynamy od użycia tylko tylu kolejnych wyrazów b_n aby ich suma przekroczyła s tzn. $b_1 + b_2 + \ldots + b_{r_1} \geq s$ i r jest najmniejsze o tej własności. Jest to możliwe gdyż szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny. Następnie odejmujemy tylko tyle wyrazów c_n aby suma $b_1 + \ldots + b_{r_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{p_1} < s$. Dalej ponownie bierzemy tyle kolejnych wyrazów b_n aby suma $b_1 + \ldots + b_{r_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{p_1} + b_{r_1+1} + \ldots + b_{r_2} \geq s$ i odejmujemy wyrazy c_n aby suma $b_1 + \ldots + b_{r_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{p_1} + b_{r_1+1} + \ldots + b_{r_2} - c_{p_1+1} - \ldots - c_{p_2} < s$. Z rozbieżności szeregów o wyrazach b_n i c_n czynność tą możemy powtórzyć nieskończenie wiele razy. Otrzymany w ten sposób szereg spełnia tezę twierdzenia. Sumy częściowe $S_{r_1+c_1+\ldots r_k}$ przekraczają s o nie więcej niż b_{r_k} oraz sumy częściowe $S_{r_1+c_1+\ldots+r_k+c_k}$ są poniżej s ale nie niżej niż o c_{r_k}. Ponieważ pozostałe sumy częściowe leżą pomiędzy wymienionymi oraz $b_k \to 0$, $c_k \to 0$ wnioskujemy, że $S_k \to s$.