Najmocniejsze twierdzenie stereometrii – zadania

1. (RUS 2003) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie P, a sfera dopisana do czworościanu $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie Q. Dowieść, że $\angle BAP = \angle CAQ$.

2. (OM 59-I-8) Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P. Dowieść, że $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

3. (OM 26-II-5) Dowieść, że jeśli w wielościan wypukły można wpisać kulę i każdą scianę tego wielościanu pomalować na jeden z dwóch kolorów tak, że każde dwie ściany mające wspólną krawędź są różnych kolorów, to suma pól jednego koloru jest równa sumie pól drugiego koloru.

4. (RUS 1986) Czworościan $ABXY$ jest opisany na sferze. Punkty A i B są ustalone, a punkty X i Y poruszają się. Udowodnić, że suma $\angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX$ jest stała.

5. Wykazać, że dla czworościanu $ABCD$ następujące warunki są równoważne:

a) sfera wpisana jest styczna do ściany ABC w środku okręgu wpisanego,

b) sfera dopisana jest styczna do ściany ABC w środku okręgu wpisanego,

c) $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BCD = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle BAD$.

6. (KLUB 44 - 574) W pewnym czworościanie wszystkie sfery dopisane są styczne do ścian czworościanu w środkach okręgów wpisanych w te ściany. Udowodnić, że czworościan ten jest foremny.

7. (RUS 1997) Sfera wpisana w czworościan jest styczna do jednej ze ścian w środku okręgu wpisanego w nią, do drugiej w jej ortocentrum, a do trzeciej w jej środku ciężkości. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.

8. Sfera wpisana w czworościan jest styczna do jednej ze ścian w jej ortocentrum, do drugiej w jej środku ciężkości, a do trzeciej w punkcie Torricellego. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.
Uwaga: Punkt T, leżący wewnątrz trójkąta ABC, jest punktem Torriciellego trójkąta ABC, jeśli $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$.

9. (OM 57-III-5) Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD, to czworościan $ABCD$ jest foremny.

10. (USA 1980) Sfera wpisana w czworościan jest styczna do każdej ze ścian w środku ciężkości. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.

11. (BUL 1981) Sfera wpisana w czworościan jest styczna do trzech ścian w ortocentrach. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.